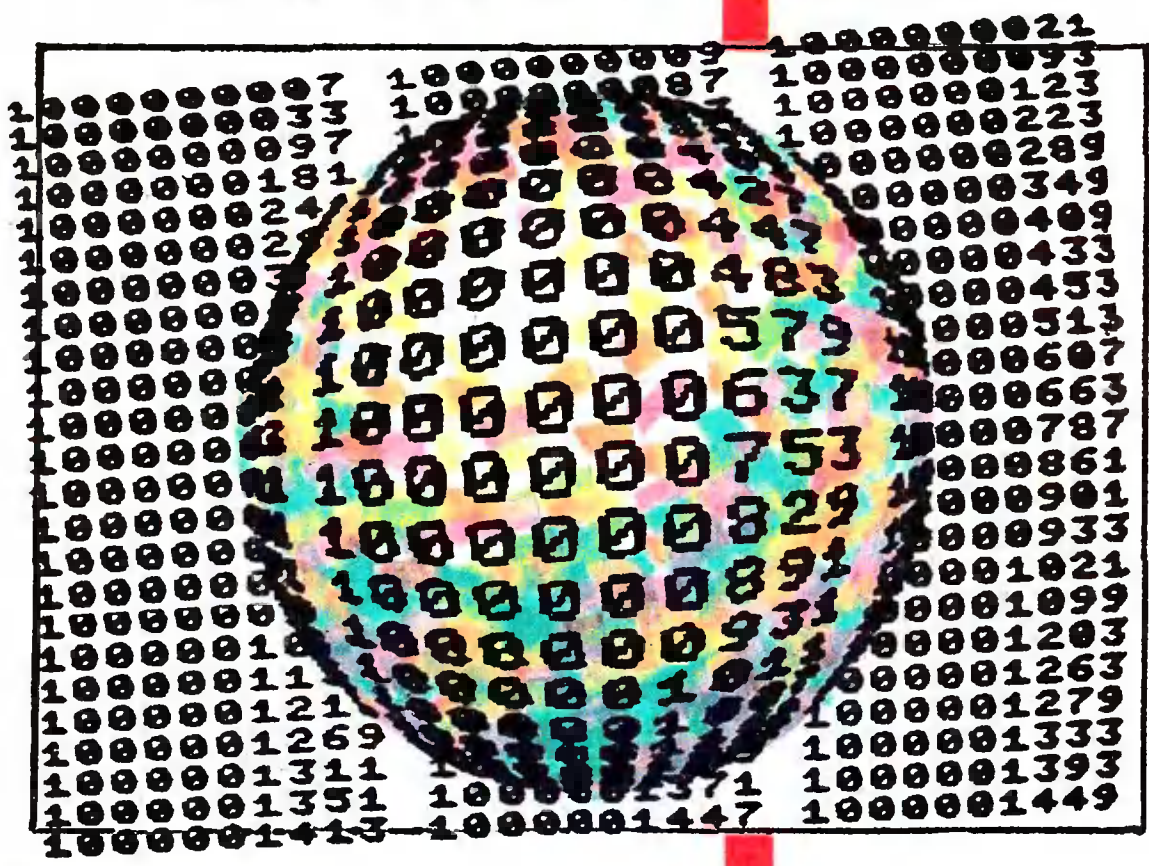


Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



На широтах простых чисел



Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Российской
академии образования
и коллектив редакции
журнала «Квант»



Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

- 2 *И. Яглом.* Что такое математика
9 *И. Воробьев.* Океанская зыбь
16 *В. Пахомов.* Демократия с точки зрения математики
21 *А. Митрофанов.* Грибы и рентгеновская астрономия
- Задачник «Кванта»
27 Задачи M1361—M1365, Ф1368—Ф1372
28 Решения задач M1331—M1335, Ф1348—Ф1352
- «Квант» для младших школьников
39 Задачи
42 *Д. Холидей.* Ошеломляющее впечатление
44 Конкурс «Математика 6—8»
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- Школа в «Кванте»
Физика 9—11:
45 Когда вокруг всё вертится...
47 Почему висит кольцо
50 Избранные школьные задачи по физике
- Математический кружок
51 *В. Протасов.* Вокруг теоремы Фейербаха
- Практикум абитуриента
59 *П. Горнштейн, В. Полонский, М. Якир.* Геометрические решения экстремальных геометрических задач
64 Алгебраические уравнения и неравенства
- Р — значит ракета
65 *Д. Джоунс.* Per funicula ad astra
- Игры и головоломки
68 Крикросс, пра-кроссворд и другие
- Олимпиады
69 XXXIII Международная математическая олимпиада
69 Задачи LV Московской математической олимпиады
71 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1992 года
73 Физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана
75 Ответы, указания, решения
- К нашим читателям (74)

Наша обложка

- 1 Первые 72 простых числа, большие 1 000 000 000,— за 30 секунд (см. с. 26).
2 *С. Дали (1904—1989)* «Открытие Америки Христофором Колумбом». В дни выхода журнала этому событию исполнится 500 лет. Мы желаем каждому читателю открытия своей Америки!
3 Шахматная страничка.
4 Головоломка «Дугомино».



ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

Хорошо известно, что весь массив наук делится на три большие группы: математические науки — естественные науки — гуманитарные науки, или, как говорил покойный академик Л. Д. Ландау, «сверхъестественные науки — естественные науки — неестественные науки», — и эту нехитрую шутку выдающегося физика мы еще прокомментируем ниже.

Естественные науки — физика, химия, астрономия, биология, медицина... — изучают окружающий нас мир; гуманитарные — история, литература, филология, юриспруденция, социология... — человеческое общество, также представляющее собой реальность, поддающуюся наблюдениям и даже эксперименту; математика же изучает самое себя. С этой, безусловно, самой основной точки зрения различие между математикой и «нематематикой» оказывается несравненно более глубоким, чем различие между естественными и гуманитарными дисциплинами. Более того, за последние десятилетия граница между естественными и «неестественными» науками постепенно стирается, так что про ту или иную область знания в настоящее время зачастую оказывается вовсе не просто сказать, относится ли она к кругу естественных или гуманитарных наук.

Что представляет собой сегодня, скажем, экономика? По происхождению и стоящим перед ней целям она, бесспорно, должна быть причислена к наукам гуманитарным; однако принятая здесь методика, да и сама постановка целого ряда «типичных вопросов» современной экономической науки таковы, что иногда представляется более естественным отнести эту науку к той же группе,

что и физику и геологию. Напротив, психология ранее обычно рассматривалась как раздел медицины и, следовательно, как естественнонаучная дисциплина. Однако в наши дни, в связи с развитием ряда новых ее областей вроде массовой психологии, социальной психологии, психолингвистики (пограничной между психологией и языкознанием), она вполне может фигурировать и в списке гуманитарных наук.

«Сращивание» естественных наук с гуманитарными стимулируется математизацией последних, использованием в них дедуктивных методов и математического моделирования, применением многих разделов математики — от элементарной алгебры до топологии. В самом деле, ранее гуманитарные науки математическим аппаратом и дедуктивными рассуждениями не пользовались, что в первую очередь, и отличало их от астрономии или физики. Заметим, кстати, что разграничение математики и гуманитарных наук в предшествующую эпоху подчеркивалось еще и тем, что математика («доказательная») всегда пренебрегала индуктивными или чисто описательными рассуждениями, так что, скажем, появление известной книги Дж. Пойя «Математика и правдоподобные рассуждения» «истинные математики» вполне могли рассматривать как недопустимый акт, раскрывающий непосвященным «кухню» их работы, которая не должна быть доступна неспециалисту. (Я вспоминаю, с каким жаром покойный А. Я. Хинчин на своих университетских лекциях по математическому анализу убеждал студентов в том, что единственное требование к доказательству состоит в его формальной полноте; при этом математик имеет право начать рассуждение какой-либо абсолютно немотивированной фразой

Из книги И. Яглома «Математические структуры и математическое моделирование» (М.: Советское радио, 1980).

типа «Рассмотрим следующую функцию...» — и на вопросы о том, откуда взялась эта функция, он отвечать не обязан.)

Ныне, однако, дело обстоит уже не так: сближение математики с гуманитарными дисциплинами привело к определенной «гуманизации» математики, к проникновению в нее подходов и точек зрения, характерных для наук гуманитарного цикла. Несколько заостряя реальную ситуацию, можно даже сказать, что для наших дней типичен не только математически мыслящий гуманитарий, но и гуманитарно мыслящий математик.

Различие между гуманитарными и естественными (или более математическими) науками ранее заходило столь далеко, что, например, во французском или английском языке даже сам термин «наука» (science) не принято было прилагать к таким дисциплинам, как литературоведение или история. Именно этот момент — отсутствие в гуманитарных науках дедуктивных выводов, со времен Платона и Аристотеля считавшихся единственно доказательными или «научными», так же как и некоторую расплывчатость (по сравнению, скажем, с физикой или математикой) существующих здесь критериев истинности, и акцентировал Л. Д. Ландау, когда со свойственным «настоящему ученому» (англ. scientist) высокомерием характеризовал юриспруденцию или историю как «неестественные науки».

В настоящее же время ситуация здесь изменилась весьма радикально — и математическая лингвистика (и даже математическое искусствование или математическое литературоведение), математическая психология или математическое правоведение, а также иные «гуманитарно-математические гибриды» (не говоря уж о математической экономике!) заняли весьма большое место в научном багаже ученых-гуманитариев, в силу чего на филологических, юридических или экономических факультетах университетов зачастую читаются весьма обширные курсы ма-

тематики, заметно превосходящие по объему курс «высшей математики», испокон веков читавшийся будущим инженерам. В связи с этими новыми тенденциями вполне можно рассчитывать, что в недалеком будущем французский термин science станет охватывать как математические и естественные, так и гуманитарные дисциплины. Возможно, что и Л. Д. Ландау, живи он сегодня, даже в шутку уже не стал бы называть соответствующие науки «естественными».

Естественные и гуманитарные науки изучают объективно существующую реальность — и единственным критерием истины, скажем, для физика является совпадение получаемых им результатов с наблюдаемыми, с прямым экспериментом; так, например, тот же Ландау на сделанный ему упрек в нестрогости доказательства однажды ответил так: «А Вы можете указать доказательство, которое лучше моего будет совпадать с экспериментом?» Таким образом, физическое рассуждение является правильным, если полученный с его помощью результат совпадает с реально наблюдаемыми фактами, и неправильным, если этот результат противоречит эксперименту. Напротив, математика строится чисто умозрительно; она не имеет дела ни с какой «лабораторией», кроме человеческой головы. Критерием истинности математического рассуждения является лишь его логическая безукоризненность, выполнение на всех этапах рассуждения устанавливаемых самим математиком правил вывода, относящихся к вполне определенной ветви математической науки — математической логике. При этом на сегодняшний день мы имеем уже вовсе не единственный набор правил вывода, а много разных а priori возможных таких наборов. И вполне может случиться, что математическое рассуждение, которое признает правильным один ученый, другой таковым считать откажется, причем эти две диаметрально противоположные позиции вовсе не будут означать, что один из упомянутых ученых прав, а второй

ошибается: нет, правы они оба, только исходят они из разных «правил игры», что и приводит к двум разным «математикам».

В старых школьных учебниках геометрии бытовала фраза: «Справедливость аксиом подтверждается многовековым опытом человечества». Этот тезис является отражением точки зрения Аристотеля; однако с точки зрения «чистого» математика (если только существуют совсем уж «чистые» математики!) он не имеет никакого смысла. В самом деле, как может «многовековой опыт человечества» (или какие угодно другие аргументы) подтвердить или опровергнуть тот факт, что слон на шахматной доске ходит исключительно по диагонали, — ведь этот факт представляет собой условное соглашение, входящее в определение слона как шахматной фигуры, и никакой проверке его истинность не подлежит. Как может многовековой опыт человечества подтвердить или опровергнуть то, что для каждых двух точек A и B плоскости существует (и притом единственная) прямая этой плоскости, проходящая как через A , так и через B ? Ведь с точки зрения современной математики под плоскостью понимается просто множество элементов $\{A, B, C, \dots\}$, обозначаемых большими латинскими буквами, и множество элементов $\{i, m, n, \dots\}$, обозначаемых малыми латинскими буквами; первые из этих элементов мы назовем «точками», а вторые — «прямыми», но свободно могли бы выбрать для них и какие угодно иные наименования*).

Далее, про вводимые таким образом (без всякого определения!) «точки» и «прямые» известно, что они связаны между собой рядом отношений,

первым и главнейшим из которых является отношение принадлежности. При этом от связывающих точки и прямые плоскости отношений требуется выполнение ряда «правил» или «условий», одним из которых как раз и является только что сформулированная аксиома, и с точки зрения математики вопрос о доказательстве (или даже всего лишь о достаточно надежной мотивации) истинности этого утверждения столь же бессодержателен, как и вопрос о «доказательстве» правил движения слона на шахматной доске.

Выше мы сказали, что понятия «точки» и «прямой» плоскости вводятся без всякого определения, и даже подчеркнули эту мысль как чрезвычайно важную восклицательным знаком в конце соответствующего утверждения. Однако теперь мы, пожалуй, возьмемся оспаривать наш собственный тезис. Имеет или не имеет определения понятие «шахматный слон»? Ответ на этот вопрос, по существу, был дан выше. Разумеется, для лица, не умеющего играть в шахматы, понятие это совершенно бессмысленно — ничем не лучше, чем для нас с вами понятие «тарарабумбия», пока этот странный, явно антинаучный термин никак нами не определен. Но для шахматиста понятие «слон» совершенно ясно: под шахматным слоном он понимает фигуру, в начальной позиции занимающую на шахматной доске положения $c1$ и $f1$ («белые слоны») и $c8$ и $f8$ («черные слоны»), причем в процессе игры эти фигуры могут перемещаться, а также исчезать с доски («слон побит») или возникать на ней (пешка «прошла в слоны») в соответствии с вполне определенными правилами, полный набор которых может рассматриваться как косвенное определение соответствующего понятия. Другими словами, само по себе понятие «шахматный слон» следует считать бессодержательным, неопределенным; однако сочетание слов «игра в шахматы» имеет четко очерченный, хоть и достаточно сложный смысл, — и вот в рамках этого-то понятия находит место более частное понятие «шахматный слон».

* Давид Гильберт (1862—1943) как-то заметил, что содержание евклидовой геометрии не претерпит никаких изменений, если мы заменим слова «точка», «прямая» и «плоскость», скажем, терминами «стул», «стол» и «пивная кружка» (из самой формы этого высказывания видно, что оно родилось в процессе обсуждения проблем математики за столом геттингенской пивной). Впрочем, здесь Гильберта частично обошел Жан Лерон Даламбер (1717—1783), указавший в своей прославленной «Энциклопедии» (в статье «Определение»): «Элементы геометрии можно сделать точными (но смешными), назвав треугольником то, что обычно называется кругом».

Но точно так же обстоит дело и с понятиями (математических) точки и прямой! Для незнакомого с математикой (а точнее — с планиметрией) лица эти понятия, разумеется, совершенно бессодержательны. Однако уже школьник знает, что планиметрия в целом может быть описана как совокупность элементов двух родов: точек A, B, C, \dots и прямых a, b, c, \dots , в объединении составляющих то, что принято именовать «плоскостью»; при этом точки и прямые подчиняются определенным правилам, в своей совокупности образующим косвенное определение как всей планиметрии, так и ее «образующих элементов», т. е. точек и прямых, а также связывающих эти элементы «основных отношений».

Таким образом, понятие (математической) точки само по себе вне рамок планиметрии никакому определению не подлежит: точка, как и пресловутый поручик Кижэ, «фигуры не имеет», так что не склонный задумываться над происхождением математических понятий «чистый» математик, пожалуй, сочтет, что знакомое каждому общежитейское понятие точки как мельчайшей («неделимой») области физического пространства или как следа однократного касания бумаги карандашом или иным заостренным пишущим предметом имеет к понятию математической точки не больше отношения, чем индийский или африканский слон — к шахматному. Таким образом, наблюдаемое органами чувств и регистрируемое приборами физическое пространство не связано с абстрактно-математическим пространством, формально описываемым относящимся к нему набором аксиом. Более того, эти два «пространства» относятся даже к совсем разным кругам понятий — к области математических наук и к области естественных наук, или, используя терминологию Платона, — к «миру видимому» и к «миру умопостигаемому».

Однако подобное рассуждение оставляет у нас смутное чувство неудовлетворенности, сознание, что мы

говорим что-то не совсем то... Вспомним глубокие знания по геометрии древних вавилонян или египтян — знания, включающие столь содержательные факты, как теорема Пифагора или формула для объема усеченной пирамиды. Но ведь математика-то возникла гораздо позже, чем составляли свои пособия вавилонские жрецы и египетские писцы, а именно всего лишь в VI—V вв. до н. э. Как же могла геометрия, составляющая раздел математики, появиться раньше математики? Не равносильно ли подобное предположение парадоксальной мысли, скажем, о том, что судак появился на земле раньше, чем вообще возникли рыбы? Объяснить это кажущееся противоречие можно тем, что слово «геометрия», подобно, например, словам «точка» (математическая или физическая) или «слон» (шахматный), имеет два совершенно разных смысла. Но при этом, если связь между понятиями шахматного и живого слона является, так сказать, чисто лингвистической, порожденной в какой-то мере случайным использованием одного слова для описания разных понятий, то соотношение между двумя смыслами слова «точка» или двумя смыслами слова «геометрия» является уже содержательным и для нашей темы настолько важным, что на этом необходимо остановиться подробнее.

Странный мир геометрии — все в нем предельно конкретно, наглядно, осязаемо, и в то же время призрачно, бестелесно, условно. Формула для объема цилиндра точно оценивает количество воды, которое можно налить в стакан или бидон, — но ведь на самом деле слова «цилиндр», «конус», «прямая», «плоскость» обозначают некие абстракции, нигде в жизни не встречающиеся и не реализуемые. Представление о плоскости может дать, скажем, хорошо отшлифованная металлическая пластина, — но не о плоскости, конечно, а лишь о небольшом ее участке, ибо всю (безграничную!) плоскость даже и попытаться представить себе нельзя, так как попытка «далеко» продолжить в вообра-

жении видимую поверхность пластины сразу же поставит перед нами немислимо сложные вопросы о глобальном строении вселенной. Но и маленькую часть плоскости наша пластина представляет весьма приближенно — ведь если мы захотим отшлифовать ее до «полной» гладкости, то неизбежно придем в противоречие с атомным строением вещества, и это еще до того, как перед нами встанет вопрос о природе самих образующих пластину атомов, столь далеких от привычной нам геометрии, что уж на атомном-то уровне и речи быть не может ни о какой плоскости. Грубую модель прямой линии доставляет, например, край стола, а «точное» ее представление дает луч света, — и, скажем, Лобачевский или Гаусс в своих опытах по измерению суммы углов «физического» треугольника, стремясь к максимальной строгости и полноте, принимали за стороны треугольника направления, в которых из одной вершины треугольника видна другая его вершина. Но ведь с точки зрения современной физики свет имеет сложную корпускулярно-волновую природу, причем если даже и мыслить свет «по Ньютону» как поток элементарных частиц — фотонов, то все равно вопрос о траектории фотона оказывается некорректно поставленным, т. е. попросту бессмысленным, так что о прямой здесь говорить не приходится никак. И при всем том практическая применимость геометрических формул и теорем, скажем, в деятельности конструктора оказывается столь полной, что в случае неудачи выполненной по его расчетам модели инженер усомнится в чем угодно, но только не в этих теоремах и формулах.

Таким образом, мы явно имеем две совсем разные «геометрии». «Геометрия-физика» является одной из естественнонаучных дисциплин и изучает специфические свойства реальных тел, в первую очередь, их размеры и форму, в то время как «геометрия-математика» относится к кругу математических наук и изучает определенные математические структуры, во всей («идеальной») полноте в практической

жизни не реализуемые (т. е. не существующие). При этом возникла «геометрия-физика» раньше «геометрии-математики» (чем снимается всякая загадочность с факта появления геометрии до математики); однако с самого зарождения «геометрии-математики» развивались наши две геометрии в постоянной и неразрывной связи. К логической системе «геометрии-математики» ученые первоначально пришли путем идеализации свойств реальных тел, предельного упрощения наблюдаемых в окружающем мире явлений, сохранения лишь самых фундаментальных (т. е. самых простых и глубоких) из относящихся к ним фактов; эти «главные» факты компактно записывались в виде списка аксиом, возникших в результате суммирования данных многократных экспериментов, производимых над поверхностями пластин и плит (эти поверхности получили общее наименование «плоскостей»), над лучами света и краями этих плит (называемых «прямыми») и т. д. С другой стороны, делаемые уже чисто логическим путем выводы о свойствах абстрактных объектов, рассматриваемых в «геометрии-математике», немедленно (и успешно) применялись к изучению свойств материальных тел, изучением которых занималась «геометрия-физика». Иногда, правда, возникало несоответствие между математическими выводами и физическими наблюдениями, как это произошло, скажем, при анализе результатов опытов Майкельсона по измерению скорости света; но такое несоответствие лишь приводило к необходимой модификации «математического пространства», к построению новых абстрактных схем, с большей полнотой, чем прежние, охватывающих феномены действительного.

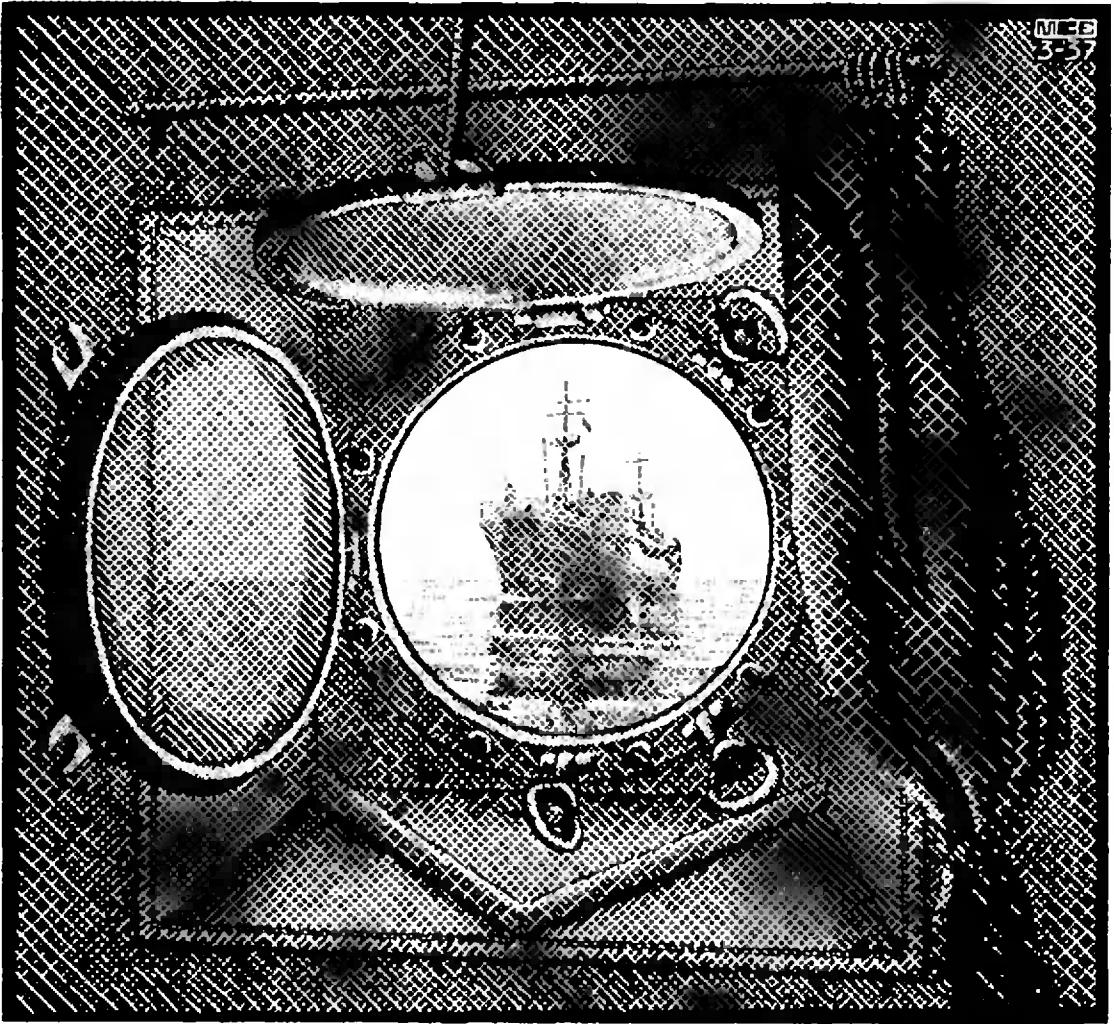
Таким образом, взаимоотношения «геометрии-физики» и «геометрии-математики» имитируют общий процесс развития точного знания, неизбежно проходящий через этапы индуктивного накопления фактов («геометрия-физика»); последующего их обобщения и построения на базе этих фактов дедуктивной теории («геометрия-мате-

матика»), из которой, в свою очередь, делаются выводы, касающиеся реальной действительности; опытной проверки полученных выводов (снова «геометрия-физика»); перестройки и модификации теории в свете вновь полученных фактов (опять «геометрия-математика»), — и так без конца. Другими словами, «геометрия-математика» возникла как математическая модель физической вселенной, причем практическая ценность этой модели первоначально связывалась исключительно лишь с возможностью делать на ее базе выводы, касающиеся реального (физического) мира. После этого и «геометрию-физику» стало возможно рассматривать как физическую модель абстрактного (математического) пространства, описываемого в соответствии с общей схемой построения «выводных наук» Аристотеля, т. е. списком основных (неопределяемых) объектов и отношений и набором аксиом, характеризующих эти объекты и отношения. Именно такой подход к геометрии обусловил единодушие, с которым творцы неевклидовой геометрии — К. Ф. Гаусс и Н. И. Лобачевский, не ведая в этот момент о близости сделанных ими открытий, бросились измерять сумму углов «физических» треугольников (вершинами которых служили три удаленные друг от друга точки земной поверхности у Гаусса и три небесных тела у Лобачевского). Разумеется, результат этих измерений не мог иметь никакого отношения к вопросу об истинности или ложности геометрии Лобачевского как математической теории, но он мог указать на наличие физической ее модели, полностью оправдывающей само существование этой теории, возможно даже делающей ее необходимой.

Двусторонняя связь наук математических (в данном случае — «геометрии-математики») с науками естественными («геометрией-физикой») указывает то место, которое занимает математика в системе наук и в жизни людей. Когда-то знаменитый Гаусс сказал: «Математика — это царица наук»; однако теперь-то мы понимаем, что она занимает в мире иное,

куда более почетное положение: она является служанкой всех (и естественных, и гуманитарных) наук, помогая им, доставляя им адекватный аппарат для описания всевозможных фактов и явлений. Более того, математика — это та служанка, без которой и госпожа-то не является госпожой, без которой науку и за науку признать невозможно, ибо «уровень научности» той или иной дисциплины можно измерить объемом применяемых в ней математических рассуждений, глубиной и содержательностью характерных для этой дисциплины дедуктивных выводов (вспомните наше замечание об употреблении во французском и английском языках слова *science*).

Сила математики в первую очередь заключается в том, что возникшие в ее рамках числовые системы и формальные схемы доставляют нам некоторый «универсальный ключ», годный для отпирания всех на свете замков: они равно приложимы к физике и биологии, технике и социологии, астрономии и лингвистике. Математическая модель реальной ситуации — это математическая структура, объекты которой трактуются как идеализированные реальные «вещи» (или понятия), а абстрактные отношения между этими объектами — как конкретные связи между элементами действительности; такая модель позволяет составить компактную и легко обозримую сводку известных нам свойств изучаемых понятий, дающую возможность исчерпывающе их анализировать и даже предсказывать результаты будущих наблюдений, а ведь именно оправдывающиеся впоследствии предсказания составляют основной предмет гордости каждой науки, определяют ее ценность. Эта универсальность математического знания дала основание выдающемуся физик-Эйгену Вигнеру с некоторым даже недоумением говорить о «непостижимой приложимости математики к естественным наукам»; ее же имел в виду и Ландау, когда он называл математические науки «сверхъестественными».



ОКЕАНСКАЯ ЗЫБЬ

И. ВОРОБЬЕВ

Ураган за сотни километров, вокруг воздух тих, но плавные валы прокатываются один за другим насколько видит глаз. Это зыбь. Череду параллельных изгибов охватывает десятки километров, и такие волны могут идти часами.

Вблизи мыса Доброй Надежды высота валов достигает порой 9—11 м при длинах волн 100—300 м. Двухкилометровая глубина океана позво-

ляет не опасаться, что он расплещется до дна. Впечатляет и скорость этих внушительных волн; 40—70 км/ч.

Какие силы обеспечивают столь регулярное движение воды? От чего зависит скорость волн? Каков их профиль? Что происходит в толще воды? Постараемся ответить на эти вопросы. Но сначала стоит присмотреться к самой волне.

Послойное течение

С волной удобнее знакомиться, когда она стоит на месте. Представьте, что мы летим на вертолете со скоростью волны c . Относительно нас изгибы поверхности неподвижны, и вдоль их неизменного профиля стационарно течет вода. На расстоянии длины волны λ повторяются уровень и наклон поверхности и скорость V течения воды по неподвижному профилю. К поверхностному слою примыкает слой под ним, к нему — следующий... При плавном движении воды зазоров и разрывов нет, и изгибы глубинных слоев остаются неподвижными вместе с профилем поверхности, повторяясь через то же расстояние λ (рис. 1).

Итак, переход к системе отсчета остановленной волны превращает движение воды в стационарное течение по изогнутым слоям. Неподвижные границы образованы частицами воды, идущими по одной траектории. Вода не уходит из слоя, так что через любое его сечение за единицу времени пронесется одна и та же масса воды.

Изгибы не совсем одинаковы, с глубиной постепенно ослабляется их размах. Это можно понять, рассмотрев течение между границами одного слоя. При постоянстве потока слой толще там, где скорость меньше, и тоньше — где она больше. Скатываясь со склона, вода разгоняется, а поднимаясь к вершине, тормозится. Поэтому расстояние между границами больше у вершин и меньше у впадин (рис. 2). Нижняя граница каждого слоя из-за этого более полого, чем верхняя. Сокращается перепад высот, меньше изменения скорости при подъеме и спуске, с ослаблением изгибов слой становится более однородными по толщине.

В пределе приходим к горизонтальным слоям спокойной воды. Но неподвижна она относительно дна, в движущейся же системе отсчета остановленной волны у нее скорость c , направленная навстречу волне. С той же скоростью движется и дно.

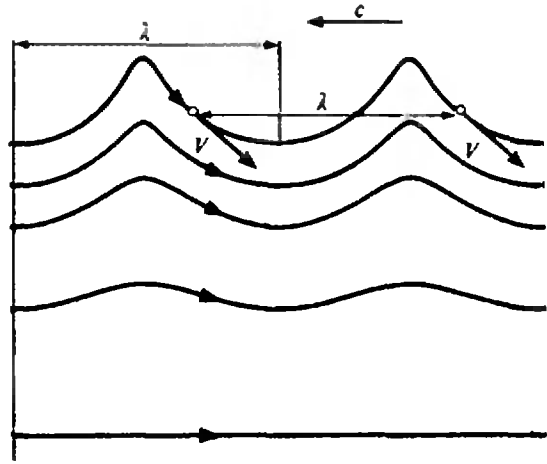


Рис. 1.

Если глубина достаточно для заметного ослабления волн, то дно оказывается в покоящейся воде и не влияет на движение в верхних слоях. Количественное условие будет найдено в конце статьи. Но уже теперь понятно, почему изрезанный рельеф дна не возмущает волны на глубокой воде.

Чтобы найти скорость движения частицы воды \vec{v} в системе отсчета, в которой берега и дно неподвижны, нужно к скорости частицы по профилю \vec{V} добавить скорость самого профиля \vec{c} (рис. 3):

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{c}.$$

Это простое соотношение сыграет еще свою роль.

Тяжесть и давление

О зыби говорят при длинах волн от одного до сотен метров. Для таких крупных волн можно пренебречь поверхностным натяжением. Пробег в сотни километров без заметного ослабления свидетельствует о крайней малости трения. Зыбь, по существу, является игрой всего двух сил — тяжести и давления.

Давление вдоль поверхности везде одинаково и равно атмосферному. На большой глубине слои почти горизонтальны, и вода в них почти неподвижна. Давление на одном уровне в покоящейся воде одинаково. На глубине оно отличается от атмосферного,

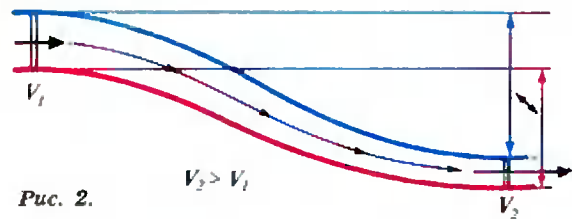


Рис. 2.

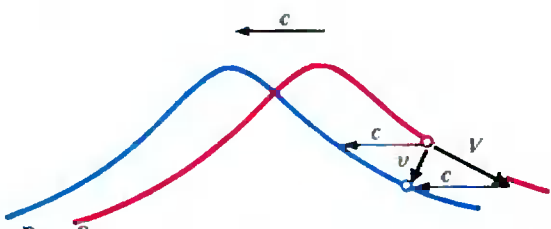


Рис. 3.

но как для поверхностной волны, так и в глубинных волнах нет перепада давления по их профилю. В промежуточных слоях неоднородность давления не может быть вызвана давлением воздуха — оно одинаково по всей поверхности. Но и снизу неоткуда взяться неоднородности. Это серьезный довод в пользу одинаковости давления на границе любого слоя.

Хотя давление одинаково во всех точках профиля, при переходе от одной границы к другой оно меняется. Такой перепад давления вместе с силой тяжести и вызывают ускорение частиц воды. Найти же этот перепад можно из следующих соображений. Слой в целом не взлетает вверх и не падает вниз. Уравновешены силы и для каждой из одинаковых ячеек слоя с продольным размером в длину волны λ (рис. 4).

Для расчета силы давления на верхнюю изогнутую границу, давление

во всех точках которой p , начнем с малого наклонного участка. Сила равна давлению, умноженному на площадь участка, и направлена по перпендикуляру к нему. А вертикальная составляющая оказывается равной давлению, умноженному на площадь горизонтальной проекции этого участка (см. рис. 4). В сумме вертикальных составляющих давление выносится как общий множитель, а сумма площадей проекций дает площадь λL горизонтального сечения волновой ячейки (ширина ячейки L). Суммарная сила давления на верхнюю границу поэтому равна $p\lambda L$ и направлена вниз.

Для нижней границы с давлением $p + dp$ направлена вертикально вверх и равна $(p + dp)\lambda L$. Разность этих сил уравновешивает силу тяжести mg , где m — масса ячейки. Тогда

$$dp = \frac{mg}{\lambda L}.$$

Рассмотрим это выражение для приращения давления. Изгиб не меняет массы слоя и массы ячейки. Она та же, что и была между горизонтальными границами ячейки в спокойной воде. Тот же в спокойной воде тогда и перепад давления, да и само давление. (В любом случае, оно начинается на поверхности с атмосферного.) Давление на изогнутой границе равно исходному гидростатическому давлению, которое составляющие ее частицы воды испытывали в спокойной воде (рис. 5).

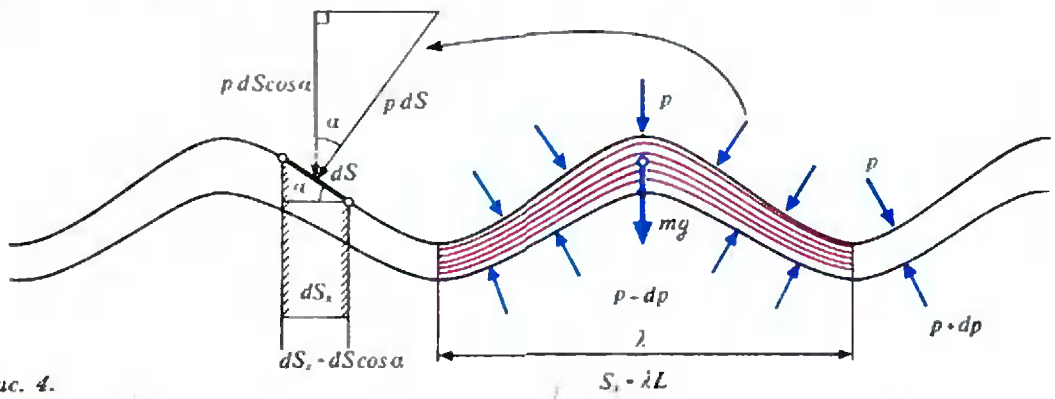


Рис. 4.

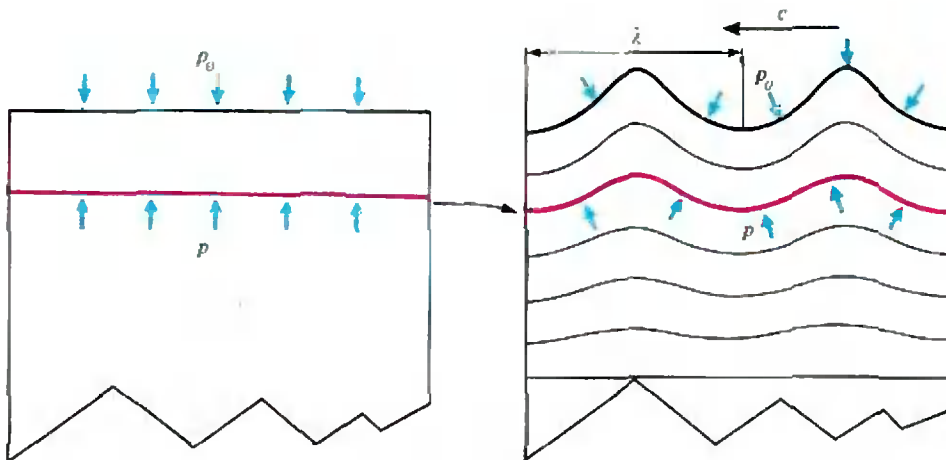


Рис. 5.

Ускорение частицы жидкости

Выделим малый участок тонкого слоя (рис. 6). Его торцы перпендикулярны скорости течения V . При времени прохождения этого участка dt длина наклонных границ равна Vdt , а их площадь — $LVdt$. Чтобы по второму закону Ньютона найти ускорение, нужно знать массу участка dm и сумму действующих на него сил.

За период $T = \lambda/c$ заменяется вся масса m волновой ячейки, поэтому ежесекундно по слою проходит масса $\dot{m} = m/T = (m/\lambda)c$. За время dt в наш участок входит масса

$$dm = (m/\lambda)c dt.$$

Отсюда сила тяжести, действующая на него, равна

$$dmg = (mg/\lambda)c dt.$$

Направлена она вниз под прямым углом к скорости волны c .

По течению давление не меняется, встречные силы давления на торцы в сумме дают нуль. Перепад давления dp на наклонных границах приводит к силе

$$dp LV dt = (mg/\lambda)V dt.$$

Эта сила перпендикулярна границе, т. е. направлена под прямым углом к скорости течения \vec{V} .

Обе силы получаются из векторов \vec{V} и \vec{c} одинаковым образом: поворотом на прямой угол и умножением

на один и тот же коэффициент $(mg/\lambda)dt$. Поэтому и сумма сил получится из суммы скоростей $\vec{V} + \vec{c}$ тем же поворотом на прямой угол и умножением на тот же коэффициент (рис. 7). Поскольку $V + c = v$, суммарную силу можно выразить через скорость частицы воды относительно дна. Она перпендикулярна этой скорости и равна

$$F_{\text{сум}} = (mg/\lambda)v dt.$$

Разделив силу на массу dm , получим, что ускорение участка равно

$$a = \frac{g}{c} v.$$

Направлено оно под прямым углом к скорости v .

Это переломный момент. Мы разобрались, к какому ускорению приводят силы давления и тяжести, что позволит шаг за шагом раскрыть все детали.

Картина движения

Ускорение, перпендикулярное скорости, не меняет ее величину. Но тогда и само ускорение $a = (g/c)v$ неизменно по модулю. Постоянное ускорение, направленное под прямым углом к скорости, явно указывает на равномерное вращение по окружности (рис. 8). При ее радиусе r центростремительное ускорение будет $a =$

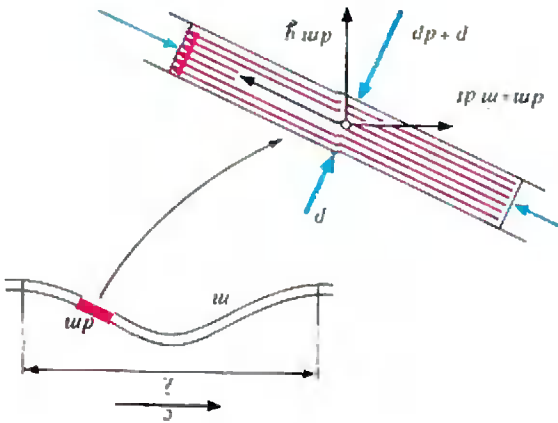


Рис. 6.

$=v^2/r$, а поскольку угловая скорость равна $\omega = v/r$, то $a = \omega v$. Сравнив последнее равенство с выражением для ускорения, найденным раньше, получим для угловой скорости:

$$\omega = \frac{g}{c}.$$

По существу, раскрылась вся картина движения: частицы воды описывают окружности постоянного радиуса с общей для всех угловой скоростью. Для частиц, образующих профиль волны, радиусы этих окружностей одинаковы, а их центры лежат на одной горизонтали. При одновременном вращении сдвиг между радиусами по углу сохраняется, а картина профиля смещается как целое со скоростью c (рис. 9). Это происходит по всей толще воды, от слоя к слою меняется только радиус окружностей.

Через период $T = 2\pi/\omega$ частица вернется в исходное положение и ока-

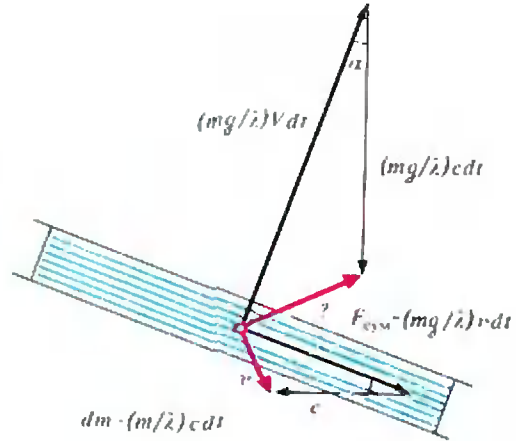


Рис. 7.

жется на таком же участке, но уже следующей волны (рис. 10), прошедшей за это время расстояние $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$. Поскольку $\omega = g/c$, то $\lambda = 2\pi c^2/g$. Для скорости волны имеем

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Разбираться с профилем удобней в системе отсчета остановленной волны. Он тогда прорисовывается самой частицей, движение которой является наложением вращения и посту-

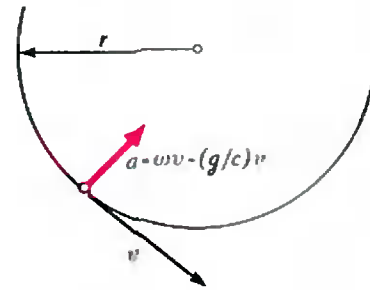


Рис. 8.

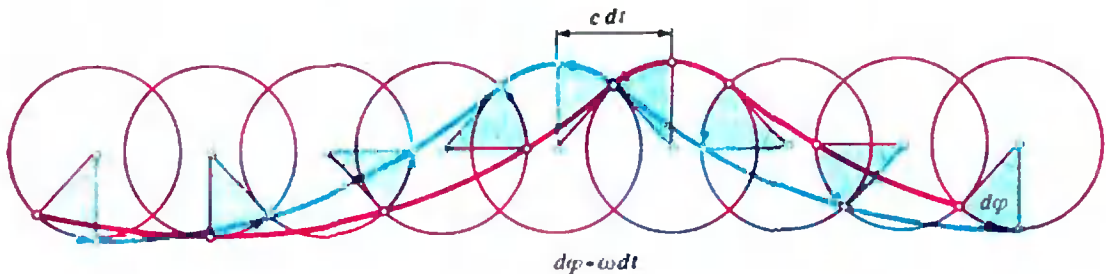


Рис. 9.

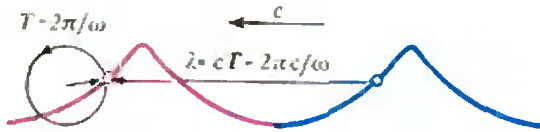


Рис. 10.

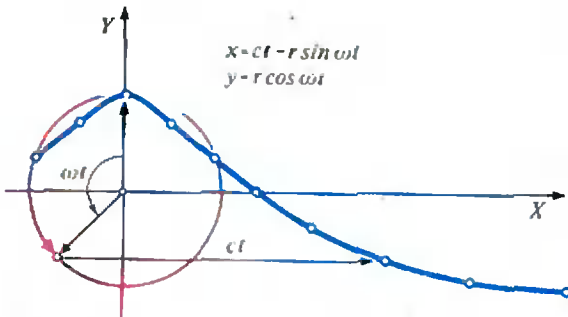


Рис. 11.

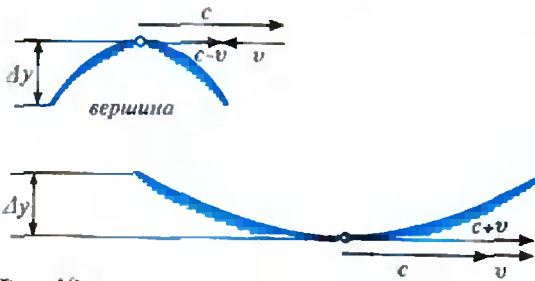


Рис. 12.

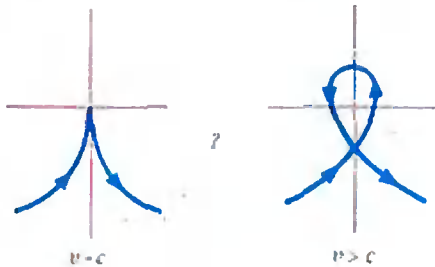


Рис. 13.

пательного движения со скоростью c . Это позволяет построить профиль и найти зависимость координат от времени:

$$x = ct - r \sin \omega t, \quad y = r \cos \omega t.$$

Начало координат (рис. 11) выбрано в центре окружности, а нулевой момент времени отвечает моменту прохождения частицей вершины.

Для слабой волны ($v = \omega r$ мало по сравнению с c) горизонтальную скорость $V_x = c - \omega r \cos \omega t$ можно считать постоянной и равной c . Тогда $x \approx ct$. В выражении для y заменим t на

x/c и получим приближенное уравнение профиля:

$$y = r \cos(\omega x/c) = r \cos(2\pi x/\lambda).$$

Слабая волна оказывается синусоидой. Приведенное выше условие «слабости» волны эквивалентно неравенству $r \ll \lambda/2\pi$.

Для умеренных волн заметно заострение у вершин и уплощение у впадин (рис. 12). Отклонения по вертикали от вершин и от впадин за равные малые промежутки времени одинаковы, а горизонтальные смещения различаются: скорость в вершине $c - v$, а во впадине $c + v$. Чем ближе v к c , тем сильнее горизонтальное «сжатие» вершин.

Физическое чутье подсказывает, что нужно ожидать особенностей при переходе естественного рубежа скорости волны. Формально, при $v = c$ образуется бесконечно острый вертикальный клев, а при $v > c$ — самопересечение профиля с появлением петли (рис. 13). Для волны на воде это выглядело бы дико. При v меньших c , но близких к ней, слои вблизи заостренных вершин, согласно нашей теории, круто изгибаются, и от слоя к слою довольно резко меняется скорость течения. Возникает сомнение не только в том, что такое движение воды устойчиво, но и в том, что оно достаточно близко к устойчивому. Поэтому случай сильных волн требует более сложного исследования.

Ослабление волн с глубиной

Вершины и впадины послыжных волн находятся точно одна под другой. В симметричных относительно вершин точках профиля одинакова по модулю скорость течения, а вследствие постоянства потока одинакова и толщина слоя, что и исключает переко.

Границы слоя в остановленной волне образованы траекториями частиц. Для каждой движение является наложением вращения и поступательного движения. Отличие в том, что центры окружностей находятся на

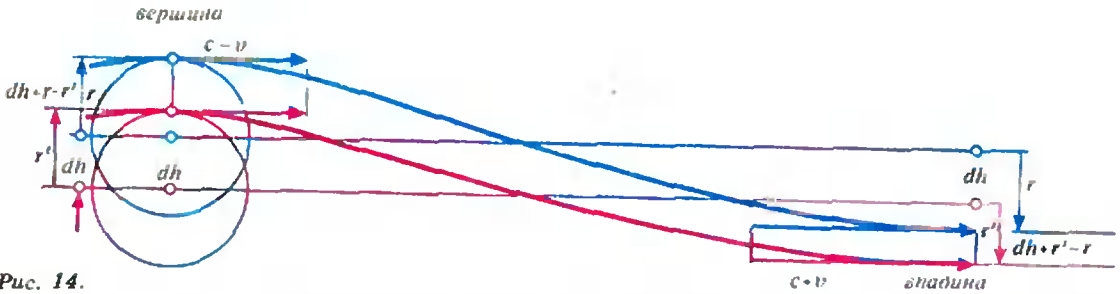


Рис. 14.

разной глубине и их радиусы не одинаковы.

Для установления зависимости радиуса от глубины обратимся к постоянству потока по слою. Выберем два сечения. Одно между вершинами, где оба радиуса «смотрят» вверх, а скорость течения равна $c-v$ и направлена горизонтально; другое между впадинами, где радиусы «смотрят» вниз, а скорость течения равна $c+v$ (рис. 14). При малом расстоянии dh между центрами радиусы r и r' верхней и нижней окружностей слегка отличаются. Толщина слоя между вершинами $dh+r-r'$, между впадинами же она $dh+r'-r$. Равенство потоков в этих сечениях означает, что

$$(dh+r-r')(c-v) = (dh+r'-r)(c+v).$$

Теперь можно найти приращение радиуса $dr = r' - r$, оно получается отрицательным:

$$dr = -\frac{v}{c} dh,$$

и это правильно, радиус с глубиной уменьшается. Поскольку $v = \omega r$, то уменьшение радиуса пропорциональ-

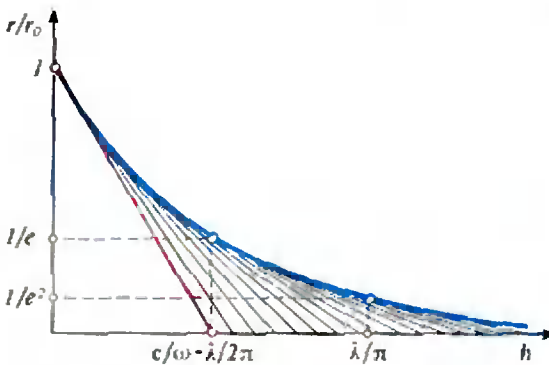


Рис. 15.

но самому радиусу. С опусканием центра окружности на dh любой радиус уменьшается на одну и ту же долю:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\omega}{c} dh.$$

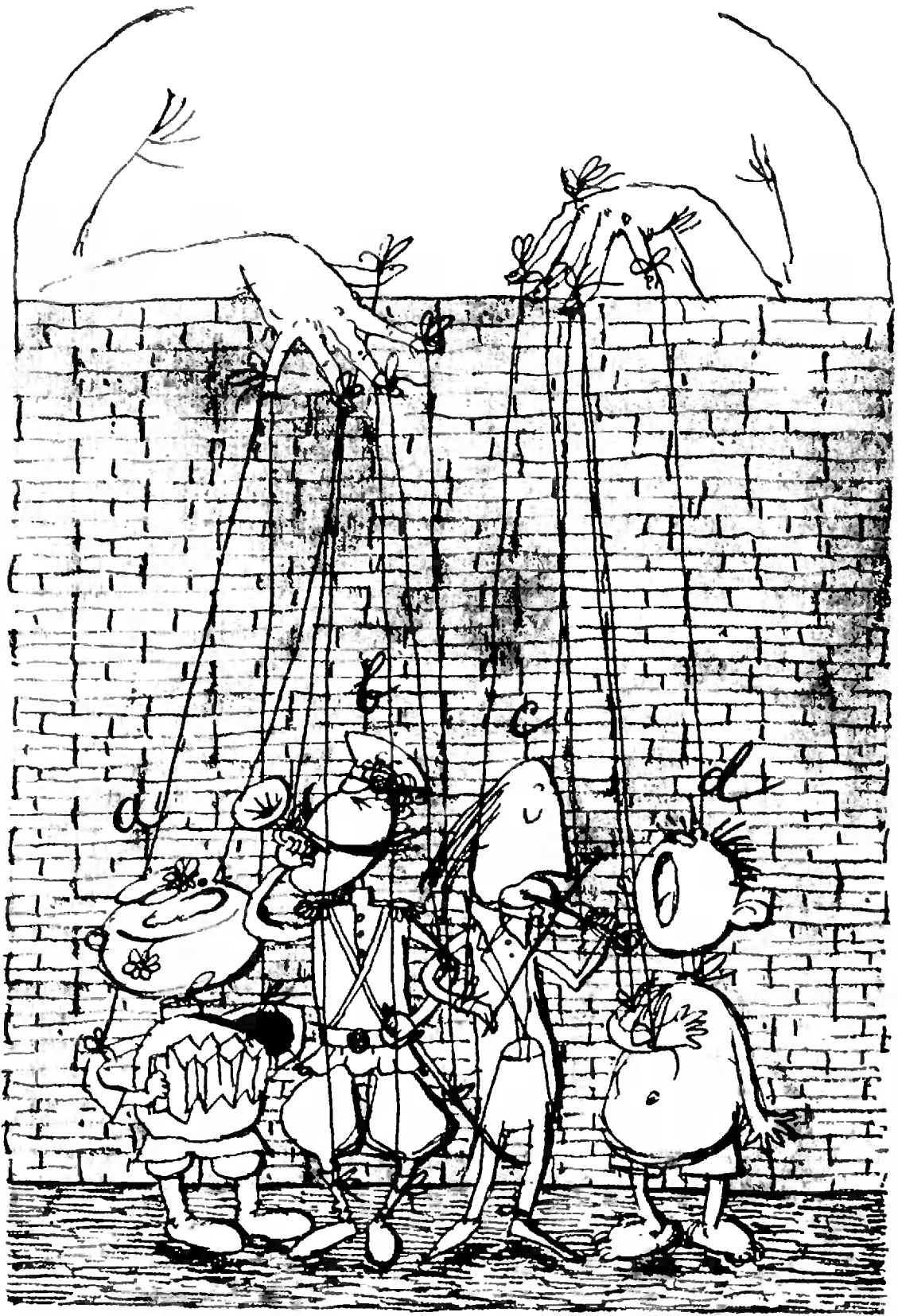
Начав с поверхностной окружности радиусом r_0 и спускаясь малыми шагами от ее центра, отсюда можно численно или графически найти радиус на любой глубине h (рис. 15). Умеющие интегрировать могут вывести аналитическое выражение:

$$r = r_0 e^{-\frac{\omega h}{c}} = r_0 e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

(легко получить, что $\omega/c = 2\pi/\lambda$).

Размах волн и скорость воды уменьшаются с глубиной в геометрической прогрессии. Число e примерно равно $2,72 \approx 10^{0,43}$. На глубине $\lambda/2\pi$ волна ослабляется примерно втрое. На глубине же, равной длине волны, — в $e^{2\pi}$ раз, что близко к 535. При глубине, сравнимой с длиной волны, придонное волнение много слабее поверхностного, что позволяет пренебречь влиянием дна.

Несколько слов в заключение. Основное исходное допущение — отсутствие перепадов давления вдоль изгибов. По существу, тогда глубинная волна подобна поверхностной, только с иным «атмосферным» давлением. Открытие такого рода «самоподобия», или «автомодельности», зачастую приводило к успеху в решении сложных проблем — от динамики сред до физики элементарных частиц. В нашей задаче это позволило описать движение всей воды, применив второй закон Ньютона к единственной частице.



ДЕМОКРАТИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

В. ПАХОМОВ

Считается, что демократия — это искусство политического маневрирования. Наверное, во многом это так, но далеко не во всем. Цель этой статьи — показать, что и математика играет не последнюю роль в политике. Обсудим проблему выбора, которую мы будем понимать достаточно широко. Это может быть выбор должностного лица, лауреата какого-нибудь конкурса, выбор проекта (конституции, закона, освоения нового региона, стратегии политической или экономической деятельности и т. п.) и так далее. Главное условие — выбирается один вариант из нескольких альтернативных и обязательно путем голосования. В основе демократических принципов и лежит это правило — наиболее важные решения принимаются путем прямого голосования самых широких слоев общества. Казалось бы, при таком подходе к делу все должны быть удовлетворены, однако на практике получается, что каждый раз после очередного голосования число недовольных вполне сравнимо (если не превышает) с числом удовлетворенных его результатом. Случайно ли это? Попробуем рассмотреть этот вопрос детально.

Некоторые правила голосования

Несколько слов о терминологии. Пусть имеется n избирателей и m кандидатов, например, в депутаты, президенты, мэры и т. д. Каждый из избирателей упорядочивает кандидатуры, определяя для себя наиболее предпочтительного кандидата, затем занимающего второе, третье и т. д. места. Например, если избиратель с номером

6 считает, что наилучшим является кандидат a , затем идет b , а затем c , то мы это запишем в виде его системы индивидуальных предпочтений так:

$$a \succ b \succ c,$$

и будем говорить, что a лучше b , b лучше c с точки зрения 6-го избирателя. Сведя эти системы индивидуальных предпочтений в одну итоговую таблицу, мы получим *профиль голосования*. Например, пусть число избирателей $n=17$, а кандидатов четверо: a, b, c и d ; и пусть пять избирателей упорядочивают кандидатов так: $a \succ d \succ c \succ b$, трое других: $a \succ d \succ b \succ c$, еще пятеро: $b \succ c \succ d \succ a$, а оставшиеся четверо так: $c \succ d \succ b \succ a$. В таком случае профиль голосования выглядит следующим образом:

Профиль A_1

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	d	d	b	c
	c	b	c	d
	b	c	d	b

Рассмотрим теперь некоторые правила голосования.

1. *Правило относительного большинства*. Каждый избиратель отдает ровно один голос за своего кандидата. Побеждает тот, кто получит наибольшее количество голосов.

Для профиля A это означает, что при голосовании a получит 8 голосов, b — 5 голосов, c — 4 голоса. Следовательно, по этому правилу побеждает a .

2. *Правило абсолютного большинства*. Каждый избиратель отдает ров-

но один голос за своего кандидата. Набравший более половины голосов побеждает. Если никто не набрал более половины голосов, то проводится вторая тур голосования. При этом во второй тур выходят два кандидата, набравшие наибольшее количество голосов. Во втором туре побеждает тот, кто набрал большинство голосов (а следовательно, и более половины числа отданных голосов).

Что это означает для нашего профиля *A*?

В первом туре число голосов, поданное за кандидатов, равно $n_a=8$, $n_b=5$, $n_c=4$. Следовательно, во второй тур проходят *a* и *b*. Вычеркнув из профиля *A* кандидатов *c* и *d*, не прошедших во второй тур, мы получим следующий профиль второго тура:

	5	3	5	4
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

Это означает, что во втором туре выигрывает кандидат *b*, за которого подано 9 голосов, тогда как за *a* — лишь 8.

К сожалению, это правило не всегда определяет победителя.

3. Правило Борда. Каждый избиратель дает нуль очков кандидату, находящемуся на последнем месте, одно очко — предпоследнему, два очка — находящемуся на третьем месте с конца и т. д. Побеждает кандидат, набравший наибольшую сумму очков.

(Это правило часто используется с небольшой модификацией на спортивных соревнованиях: каждый судья определяет место спортсмена, и побеждает набравший наименьшую сумму мест.)

Для профиля *A* имеем:

Число избирателей	5	3	5	4
Очки за места:	3	2	1	0
	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>
	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

Это означает, что число очков n_a , набранных кандидатом *a*, равно $n_a=8 \times 3 + 9 \times 0 = 24$, аналогично $n_b=5 \times 3 + 7 \times 1 + 5 \times 0 = 22$, $n_c=4 \times 3 + 5 \times 2 + 5 \times 1 + 3 \times 0 = 27$ и $n_d=12 \times 2 + 5 \times 1 = 29$.

Таким образом, побеждает *d*, на втором месте оказывается *c*, а победители по предыдущим правилам занимают наихудшие места!

Взглянем теперь на голосование с другой стороны. Что, например, представляет собой с точки зрения избирателей кандидат *d*? Из профиля *A* видно, что 8 избирателей считают его хуже *a*, а 9 — лучше *a*. Иначе говоря, *d* выигрывает дуэль с *a* девятью голосами против восьми, что мы запишем так: $d > a - 9:8$.

Аналогично в сравнении с *b* имеем $d > b - 12:5$, т. е. еще больше *d* выигрывает в сравнении с победителем голосования по правилу абсолютного большинства.

Результаты других дуэлей:

$$b > a - 9:8; \quad c > a - 9:8; \\ c > b - 9:8; \quad c > d - 9:8.$$

4. Правило Кондорсе. Победителем по Кондорсе называется такой кандидат *x*, который выигрывает в парных сравнениях у всех остальных кандидатов.

В профиле *A* победитель по Кондорсе — кандидат *c*. Отметим, что победителя по Кондорсе может и не оказаться.

Рассмотрим, наконец, еще одно правило, обобщающее два из уже перечисленных.

5. Правило с подсчетом очков. Пусть число кандидатов равно m . Фиксируем числа s_1, s_2, \dots, s_m такие, что $0 = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m$, где $s_m > 0$. Избиратели дают s_1 очков своим последним кандидатам, s_2 — предпоследним, s_3 — третьим с конца, ..., s_m — первым кандидатам. Побеждает кандидат, набравший максимальную сумму очков.

При $s_1 = s_2 = \dots = s_{m-1} = 0$ и $s_m = 1$ мы получим правило относительного большинства, а при $s_1 = 0, s_2 = 1, \dots, s_m = m$ — правило Борда. Таким

образом, разные шкалы голосования s_1, s_2, \dots, s_m могут выводить разных кандидатов в победители.

Парадоксы голосования

Первые четыре правила дают четыре различных представления о понятии «наилучшего (с точки зрения коллектива) выбора». Приводят они, как мы уже видели, к различным результатам. Причем победитель по одному из правил может оказаться наихудшим по другому. Например, для профиля A победитель по правилу относительного большинства является наихудшим по Кондорсе, а победитель по правилу абсолютного большинства — наихудшим по Борда. Поэтому при нашем профиле любой способ голосования даст результат, неудовлетворительный более чем для половины избирателей (которые, естественно, будут анализировать его с разных точек зрения). Правило 5 достаточно гибкое, и может показаться, что при надлежащем подборе шкалы оно сможет заменить любое из первых четырех. Действительно, правило относительного голосования и правило Борда следуют из него как частные случаи. Далее, пусть $s_1 = 0, s_2 = 4, s_3 = 9, s_4 = 16$, тогда победителем для A по этому правилу становится c — победитель по Кондорсе. Тем не менее это правило существенно отличается от правил абсолютного большинства и Кондорсе. Именно, верны следующие два утверждения:

Лемма 1°. *Существуют такие профили голосования, что победитель по правилу абсолютного большинства не может быть победителем ни при каком подсчете очков.*

Лемма 2°. *Существуют такие профили голосования, что победитель по Кондорсе не может быть победителем ни при каком подсчете очков.*

Доказательство леммы 1°. Его дает профиль A . Здесь победитель по правилу абсолютного большинства — кандидат b . Подсчитаем очки каждого кандидата для шкалы $0 = s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4, s_4 > 0$:

$$n_a = 8s_4,$$

$$n_b = 5s_4 + 7s_2,$$

$$n_c = 4s_4 + 5s_3 + 5s_2,$$

$$n_d = 12s_3 + 5s_2.$$

Если b — победитель, то

$$n_b - n_a = -3s_4 + 7s_2 > 0,$$

$$n_b - n_c = s_4 - 5s_3 + 2s_2 > 0.$$

Из этих неравенств получаем

$$\frac{7}{3}s_2 > s_4 > 5s_3 - 2s_2,$$

откуда вытекает, что

$$s_2 > \frac{15}{13}s_3.$$

С другой стороны, $s_2 \leq s_3$, так что

$$s_3 \geq s_2 > \frac{15}{13}s_3,$$

а значит,

$$\frac{2}{13}s_3 < 0.$$

Последнее неравенство противоречит условию $s_3 \geq 0$. Выходит, b не может быть победителем по правилу 5.

Для доказательства леммы 2° рассмотрим такой профиль B :

Профиль B

	a	b	c	d
s_3	c	a	b	b
s_2	a	b	a	c
0	b	c	c	a

Здесь $a > b - 9:8$ и $a > c - 10:7$, т. е. a — победитель по Кондорсе. Подсчитаем очки каждого кандидата:

$$n_a = 6s_3 + 7s_2,$$

$$n_b = 8s_3 + 6s_2,$$

$$n_c = 3s_3 + 4s_2,$$

откуда видно, что $n_b - n_a = 2s_3 - s_2 = s_3 + (s_3 - s_2) > 0$, так как $s_3 \geq s_2$ и $s_3 > 0$. Значит, a проигрывает b по очкам при любом подборе шкалы.

Рассмотрим еще несколько парадоксов. Как мы уже знаем, при голосовании по правилу абсолютного большинства для профиля A побеждает b . Кандидат a , не имеющий шансов

выиграть, может снять свою кандидатуру. В таком случае мы получим следующий профиль голосования:

Профиль С

5	3	5	4
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>

Теперь во второй тур выходят *d* и *b* (8 и 5 голосов соответственно), и во втором туре:

12	5
<i>d</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>d</i>

побеждает *d*! И так, *a*, отказавшись от участия в выборах, тем самым проваливает своего соперника *b*.

Аналогичный пример для правила Борда дает такой профиль:

Профиль D

	2	1
4	<i>b</i>	<i>d</i>
3	<i>a</i>	<i>c</i>
2	<i>d</i>	<i>e</i>
1	<i>c</i>	<i>b</i>
0	<i>e</i>	<i>a</i>

Здесь выигрывает *b* с 9 очками, за ним следует *d* с 8 очками. Пусть теперь *a* снимает свою кандидатуру, тогда получаем следующий профиль:

Профиль E

	2	1
3	<i>b</i>	<i>d</i>
2	<i>d</i>	<i>c</i>
1	<i>c</i>	<i>e</i>
0	<i>e</i>	<i>b</i>

где побеждает *d* с 7 очками (у *b* теперь всего 6 очков, у *c* — 4, у *e* — 1 очко).

И наконец, еще более эффектный парадокс. Рассмотрим два профиля:

Профиль F				Профиль G			
6	5	4	2	6	5	4	2
<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>

У этих двух профилей три первые колонки одинаковы, а последние отличаются тем, что в профиле G положение *a* улучшается по сравнению с профилем F, а положение *b* — ухудшается. Можно себе представить, что второй профиль получился из первого после того, как два избирателя, сведенные в последнюю колонку, поменяли свое мнение в пользу *a* против *b*.

При голосовании по правилу абсолютного большинства для профиля F в первом туре побеждают *a* и *b*, а во втором — выигрывает *a*. Для профиля G имеем: после первого тура остаются *a* и *c*, а во втором туре выигрывает *c*. Таким образом, голосуя за *a* вместо *b*, упомянутые два избирателя проваливают *a*!



(Окончание следует)

Грибы и рентгеновская астрономия

Кандидат физико-математических наук
А. МИТРОФАНОВ

*Две вещи поражают нас
больше всего — звезды над головой
и совесть внутри нас...*

Древняя мудрость

Эта статья посвящена скромной, но славной дате. 30 лет назад, точнее, 18 июня 1962 года, был обнаружен первый внесолнечный источник рентгеновского излучения. Этот источник находится в созвездии Скорпиона, и по принятой в астрономии терминологии ныне он называется Скорпион X—1 (Sco X—1).

Открытие было сделано совершенно неожиданно в ракетном эксперименте американскими учеными Б. Росси и Г. Кларком из Массачусетского технологического института и Р. Джаакони, Ф. Паолини и Г. Гурским из Американской научно-технической корпорации. Экспериментаторы планировали исследовать в рентгеновской области спектра (в полосе $2\text{А} < \lambda < 8\text{А}$) с помощью счетчиков фотонов флюоресценцию поверхности Луны, которая вызвана потоком быстрых частиц, истекающих из горячей солнечной короны, — солнечным ветром. С поверхности Земли мягкое рентгеновское излучение не регистрируется, так как оно поглощается атмосферой. Поэтому и пришлось устанавливать приборы на борту ракеты «Аэроби-150», способной поднимать научную аппаратуру на высоту более 200 км.

Тогда считалось маловероятным, что кроме Солнца и Луны на небе что-то заметно излучает в рентгеновском диапазоне. *) Действительно, до

*) Рентгеновское излучение Солнца было открыто в конце 40-х годов американскими учеными. В окрестности земной орбиты поток рентгеновского излучения от «спокойного» Солнца порядка 10^8 фотонов / (см² · с). Во время солнечных вспышек рентгеновский поток возрастает во много раз.



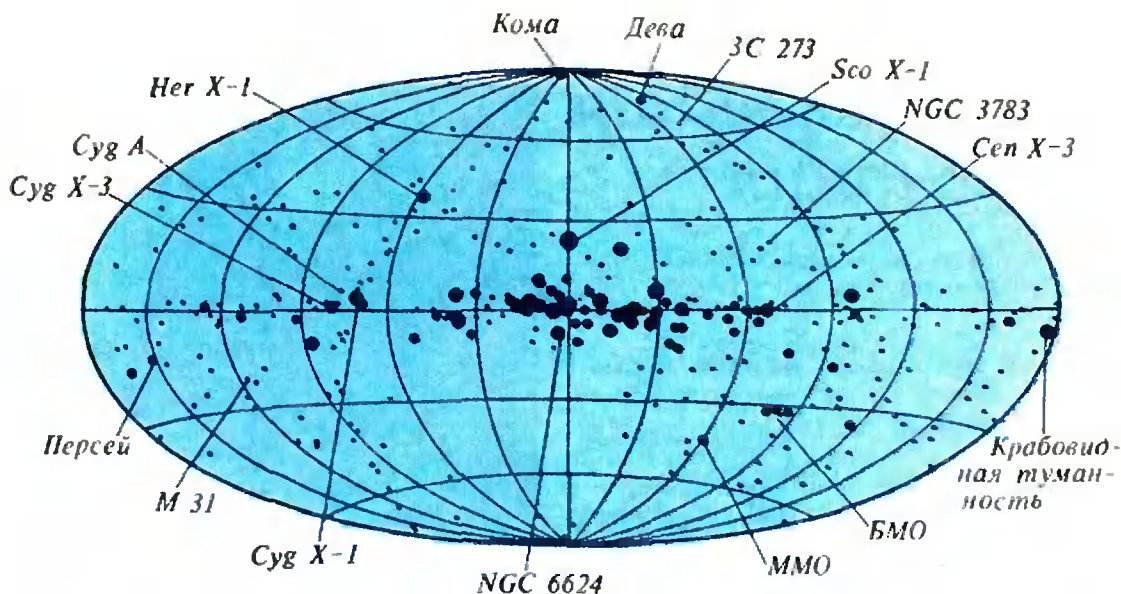


Рис. 1. Карта «рентгеновского» неба, полученная по результатам обработки информации со спутника «Ухуру», запущенного группой Р. Джакони 12 декабря 1970 г. Величина кружка соответствует яркости источника. Источник Sco X—1, зарегистрированный в ракетном запуске 1962 г., один из самых ярких на небе. Он расположен в центральной части карты, недалеко от галактического экватора. В этом эксперименте использовались счетчики рентгеновских фотонов с пластинчатыми коллиматорами с углом зрения $5 \times 5^\circ$ и $5 \times 0,5^\circ$.

звезд, даже до самых близких, так далеко, что множитель $1/R^2$, учитывающий ослабление потока от звезды с расстоянием R , сводил на нет все попытки зарегистрировать рентгеновское излучение от звезд типа Солнца и даже от более массивных и горячих звезд.*) Рентгеновский поток от горячих звезд по оценкам не должен был превышать величины порядка 10^{-3} фотон/(см²·с), т. е. должен быть очень слабым для возможного измерения существующими тогда приборами. И тем не менее два из трех счетчиков фотонов в рентгеновском эксперименте 1962 года показали резкое увеличение скорости счета.

В полете ракета вращалась вокруг продольной оси, и показания счетчиков коррелировали с этим движением. Поэтому, хотя у счетчиков было большое поле зрения, удалось выяснить, что источником рентгеновского излучения является некоторый объ-

ект, находящийся приблизительно в направлении на центр нашей Галактики. Точное направление на источник в том эксперименте установить было невозможно, хотя было ясно, что ни Солнце, ни Луна к увеличению скорости счета рентгеновских фотонов отношения не имели. В том же эксперименте был обнаружен сравнительно яркий непрерывный рентгеновский фон неба.

Год спустя ученые повторили запуск «Аэробы» с новой аппаратурой. Поле зрения рентгеновских счетчиков было уменьшено с помощью так называемого рентгеновского коллиматора, имеющего стенки, непрозрачные для рентгеновских лучей. Источник, открытый в 1962 году, был зарегистрирован вновь! Но теперь уже удалось определить его координаты на небесной сфере. Еще один яркий рентгеновский источник был обнаружен, правда, в другой части неба, в Крабовидной туманности (Таи X—1). Сомнений не осталось: вне Солнечной системы есть необычайно яркие рентгеновские излучатели (рис. 1, 2). Это открытие

*) Современная аппаратура позволяет регистрировать рентгеновское излучение звездных корон обычных звезд, например α -Центавра — звезды типа Солнца.

перевернуло старые представления об устройстве Вселенной и стимулировало развитие совершенно новой экспериментальной науки — рентгеновской астрономии. Подробнее об этом открытии и о природе необычных рентгеновских источников во Вселенной вы сможете узнать из научно-популярной литературы. Некоторые из ссылок вы найдете в конце этой статьи.

Ну а мы с вами на этом оставим небо и выдающееся открытие в астрофизике XX века и вернемся на Землю, к экспериментальной аппаратуре, с помощью которой и делаются открытия. Рассмотрим подробнее один из элементов рентгеновской оптики — коллиматор, входящий в состав аппаратуры современного рентгеновского или гамма-телескопа (рис. 3, 4). Устройство его простое: это система параллельных плоскостей из металла, масок, щелей или одинаковых трубочек, ограничивающих поле зрения зеркала телескопа или счетчика фотонов. Желательно, чтобы стенки коллиматора были «черными» для длин волн в рабочем диапазоне спектра. Тем самым объекты вне поля зрения прибора и посторонний непрерывный фон не будут мешать наблюдать источники по лучу зрения на малом угловом расстоянии от его оси.

Если бы вам сказали, что в лесу растет бинокль или какой-либо другой оптический прибор, вы, конечно, не поверили бы. И тем не менее, в наших лесах можно встретить нечто, очень напоминающее оптическое устройство — рентгеновский коллиматор, о котором идет разговор. Мы не шутим. Действительно, «макет» такого прибора, его «модель», почти готовая к использованию в экспериментах, растет на березах или некоторых других деревьях. Это так называемый настоящий трутовик (*Fomes fomentarius*) из семейства трутовиков (*Polyporaceae*). Трутовики встречаются на отмерших сухостойных березах или ольхе. Под березами, пораженными трутовиками, растут в положенное для них время другие грибы — опята; этот секрет знаком многим грибникам.

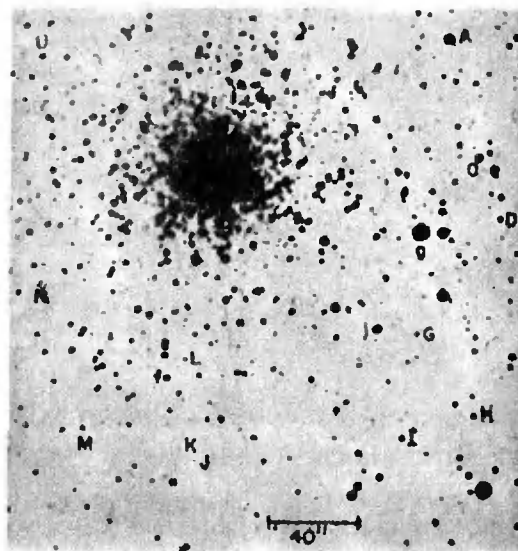


Рис. 2. Шаровое скопление NGC 6624, в котором находится сильный (интенсивный) рентгеновский источник (см. карту неба в рентгеновских лучах).

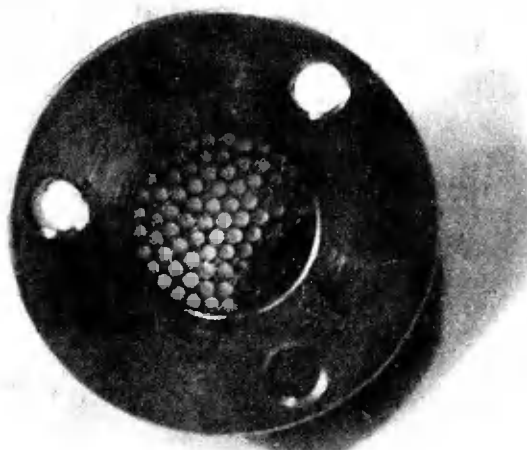


Рис. 3. Коллиматор, набранный из металлических трубочек-капилляров.

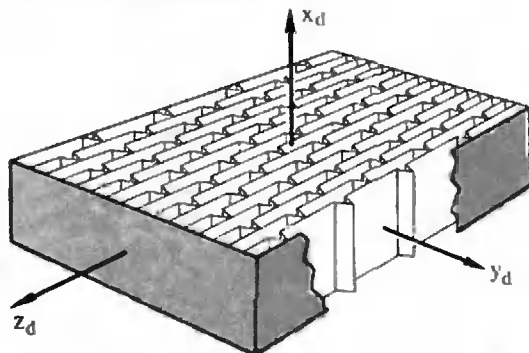


Рис. 4. Пластинчатый рентгеновский коллиматор, который использовал Росси и его коллеги.

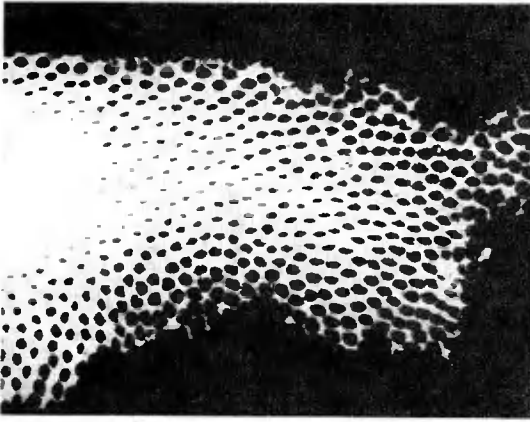


Рис. 5. Поперечный срез слоя трутовика.

Плодовое тело трутовика внешне и наощупь напоминает натуральную пробку. Но если присмотреться, то можно заметить, что эта «пробка» состоит из огромного числа пор приблизительно цилиндрической формы с осями, расположенными перпендикулярно нижней горизонтальной поверхности гриба-трутовика. В порах-трубочках находятся споры гриба. Каждый год у трутовика вырастает новый пористый слой, отчего тело гриба имеет слоистое строение. С внешней стороны гриба по уступам видно, сколько лет прожил гриб. Для наших исследований важно, что почти по всей площади гриба поры каждый сезон растут не произвольным образом, а являются продолжением прошлогодних. Поэтому, когда грибные споры высыпятся из трубочек, через толстый и плотный слой трутовика можно смотреть на просвет, ведь поры сквозные. Чем не рентгеновский коллиматор!*)

Принесем из леса крупный трутовик и вырежем из него несколько слоев различной толщины. С этими заготовками можно сделать несколько опытов. Предварительно слои трутовика желательно высушить под плоским

*)Заметим, что пустотелые поры трутовика когда-то служили людям: раньше, когда не было спичек, из трутовика выделяли трот — материал, который возгорался и тлел от унававшей искры. Искру получали при ударе огнива о кремль.

гнетом, чтобы они не коробились со временем.

Опыт 1. Прежде всего найдем, какова плотность пор, т. е. сколько пор приходится на единицу поверхности грибного слоя, и попробуем измерить их диаметр D . С помощью микроскопа эту работу можно выполнить сравнительно легко. Но вовсе не обязательно иметь микроскоп. Воспользуемся обычным фотоувеличителем или кинопроектором. Сделаем острым ножом или бритвой тоненький срез мякоти гриба, приблизительно ориентированный в направлении, перпендикулярном каналам пор гриба, т. е. параллельном нижней поверхности гриба. Поместим срез в кассету фотоувеличителя вместо негатива, сфокусируемся и отпечатаем увеличенное позитивное изображение на фотобумаге. Впрочем, можно ограничиться обводом контуров пор на обычной бумаге. Остается только прокалибровать коэффициент увеличения фотоувеличителя, посчитать количество пор на снимке и измерить их диаметр. В качестве примера на рисунке 5 показано изображение теневой проекции поперечного среза трутовика, масштабная метка равна 2 мм. А на рисунке 6 видно изображение поверхности слоя трутовика, полученное с помощью более сложного устройства — растрового электронного микроскопа. Масштабная метка на снимке соответствует 1 мм (светлая линия). Из приведенных снимков следует, что средний диаметр пор трутовика около $1/3$ мм, разброс значений D не слишком велик, хотя, строго говоря, форма пор далека от идеального цилиндра.

Подумайте, почему для измерений в этом опыте мы выбрали тонкий срез гриба, а не весь его слой, хотя он тоже пропускает свет (трубочки-поры сквозные).

Опыт 2. Интересно посмотреть на предметы через слой трутовика. Включим настольную лампу, поместим на пути лучей пористый слой гриба и будем наблюдать, как выглядит спираль лампы через сквозные поры. Для проведения этого опыта необходим неко-

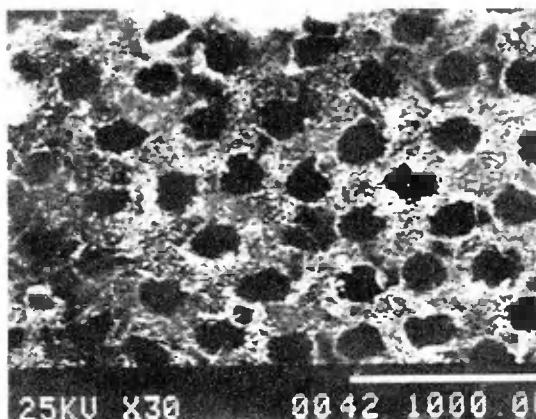


Рис. 6. Электронная микрофотография поверхности кусочка гриба-трутовика.

торый навык уметь выдерживать заданное направление и поворачивать слой на небольшой угол. Действительно трубочки-поры узкие и угол зрения коллиматора сравнительно мал: $\alpha_{\max} \sim D/L \ll 1$. Даже для тонкого слоя толщиной 3 мм он равен около 10° , а для слоя толщиной 3 см угол зрения около 1° .

Сфотографированная через пористый слой гриба-трутовика нить накала настольной лампы показана на рисунке 7.

Выполнив 2-й опыт, вы, наверное, придете к выводу, что отражение видимого света от стенок пор малое, т. е. стенки пор как бы черные. Второе, что вы заметите, это некоторое размытие изображения нити, связанное с дифракцией света на мелких отверстиях, какими являются поры. Для рентгеновского излучения роль дифракционного размытия изображения не столь существенна при той же геометрии опыта, так как длина волны рентгеновского кванта много меньше, чем видимого.

Интересно также определить, как зависят оптические характеристики слоя трутовика от параметров трубочек-пор: их диаметра D и длины L . Оптические свойства любого коллиматора, в том числе и слоя трутовика, характеризуются прежде всего угловой зависимостью кривой пропускания коллиматора T от угла α поворота его оси относительно направления на

параллельный пучок. Направляется идея провести опыт 3 — по измерению функции $T(\alpha)$, однако вместо этого попробуйте определить вид функции $T(\alpha)$ расчетным путем. Особенно эта задача будет интересной для любителей математики. Мы лишь приведем ответ:

$$T(\alpha) = T_0 \frac{2 \cos \alpha}{\pi} \left(\arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{L}{D} \operatorname{tg} \alpha\right)^2} - \frac{L}{D} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{L}{D} \operatorname{tg} \alpha\right)^2} \right),$$

$$\text{где } -\arctg \frac{D}{L} \leq \alpha \leq \arctg \frac{D}{L}.$$

Когда угол зрения коллиматора мал, т. е. когда $\alpha \ll 1$, эту формулу можно упростить, учитывая, что при малых α $\cos \alpha \approx 1$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$:

$$T(\alpha) = T_0 \frac{2}{\pi} \left(\arccos \left| \frac{\alpha}{\theta} \right| - \left| \frac{\alpha}{\theta} \right| \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\theta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

где $\theta = \frac{D}{L}$.

В такой форме обычно записывают уравнение $T(\alpha)$ для рентгеновского или гамма-коллиматора, набранного из одинаковых узких капилляров.

На этом в нашем рассказе можно было бы поставить точку. Но, право,



Рис. 7. Нить лампы накаливания, сфотографированная через пористый слой гриба-трутовика. Слой использовался в качестве коллиматора и устанавливался перед фотообъективом. Обратите внимание на некоторое размытие изображения, связанное с дифракцией света на отверстиях в слое.

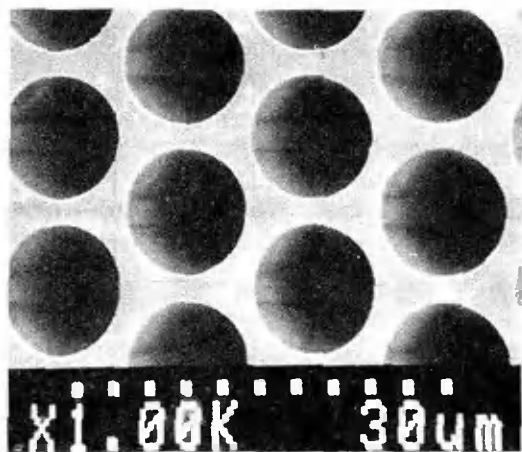


Рис. 8. Электронная микрофотография участка поверхности стеклянного микроколлиматора, изготовленного на основе так называемой микроканальной пластины. Основное применение микроканальной пластины в рентгеновской астрономии — это усиление изображения. Система полых стеклянных капилляров может применяться также для фокусировки рентгеновских лучей (линза Кумахова).

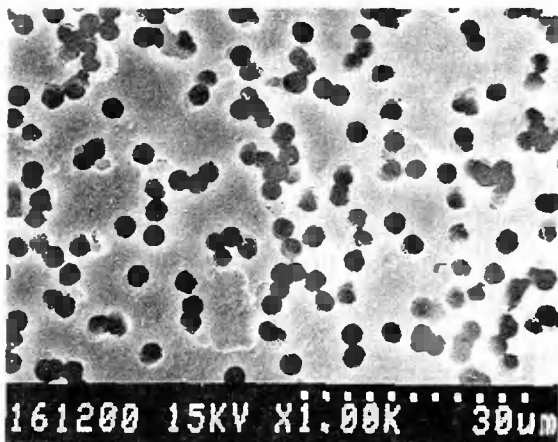


Рис. 9. Полимерный пористый коллиматор.

стоит упомянуть кратко о технических решениях задачи коллимировать рентгеновский поток, которые предложил человек, а не природа.

На рисунках 8 и 9 показаны стеклянный микроколлиматор с диаметром каналов около 10 мкм и тонкопленочный полимерный коллиматор для мягкого рентгеновского и вакуумного ультрафиолетового излучения с хаотически расположенными сквозными цилиндрическими отверстиями, диаметр которых около 2 мкм и которые могут быть сделанными еще меньше. Толщина полимерного коллиматора всего-то 10—20 мкм. Отверстия в полимерных пленках были получены при облучении материала на ускорителе тяжелых ионов и химическом травлении облученной пленки. Эти и другие искусственные пористые структуры уже давно используются в электронике и оптике, а также различных технологических задачах при фильтрации жидкостей и газов и т. д. Такие материалы по своим возможностям и техническим характеристикам кое в чем намного обогнали гриб-трутовик, о котором шла речь в нашей статье. Правда, эти стекляшки и полимерные пленки не пахнут грибами и под ними не растут опята...

Литература для дальнейшего чтения

1. Амнуэль П. Р. Небо в рентгеновских лучах. М.: Наука, 1984.
2. Нарликар Дж. Неистовая Вселенная. Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
3. Амнуэль П. Р. Загадки для знатоков. История открытия и исследования пульсаров. М.: Знание, 1988.

Наша обложка

Компьютерная графика доступна не только владельцам компьютеров с графопостроителями (плоттерами), но и тем, кто имеет доступ к более простым компьютерам. Наш читатель Станислав Румянцев из п. Локотня Псковской обл. прислал нам серию «машинных картин», сфотографированных из дисплея компьютера БК-0010. Одна из них по-

ищена на обложке № 5 (сцепленные торы), а другая — на обложке этого номера журнала. Здесь изображены первые 72 простых числа, большие 1 000 000 000. Любопытно, что на их вычисление компьютер затратил лишь 30 секунд. (А сколько времени понадобилось бы вам?) Обратите внимание, что первые два из этих чисел —

«близнецы», т. е. отличаются на 2. Эта картинка была затем подвергнута следующему преобразованию — ее центральную часть спроектировали на сферу, центр которой лежит в плоскости начального изображения. При этом часть информации пропала. Сможете ли вы ее восстановить?

А. П.

Задачник „Квант“

Задачи

M1361—M1365, Ф1368—Ф1372

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 ноября 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1361» или «Ф1368». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M1363 и M1365 предлагались на Московской математической олимпиаде, задачи Ф1368, Ф1370 и Ф1371 — на Московской физической олимпиаде 1992 года.

M1361. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника проведена высота CD и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q . Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N , а высоту CD в точке K . Докажите, что

- треугольники CMN и ABC подобны;
- точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K , радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC .

Э. Готман

M1362. Докажите, что если натуральное число a взаимно просто с 10, то для любого M найдется n , для которого сумма цифр числа a^n больше M (другими словами, сумма цифр чисел a^n не ограничена).

С. Королян

M1363. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза, если а) $n=5$? б) $n=4$? в) n — произвольное натуральное число?

С. Токарев

M1364. Пусть $a+b+c=1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Докажите неравенства:

$$а) 4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 15abc \geq 1;$$

$$б) a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27} \right\}$$

(здесь $\min(x, y)$ — наименьшее из чисел x, y).

В. Сендеров

M1365. Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с четным числом сторон. Обязательно ли его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну ребер разных цветов?

С. Токарев

Ф1368. Велосипедное колесо радиусом $R=50$ см немного деформировали — оно осталось плоским, но превратилось в эллипс с разностью полуосей $\delta=a-b=1$ см. При какой скорости качения этого колеса по горизонтальной поверхности оно начнет подпрыгивать?

Примечание. Эллипс получается при равномерном растяжении (сжатии) окружности вдоль одной из координат.

При этом уравнение окружности $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ пере-

ходит в уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

М. Цыпин

Задачник „Квант“

Ф1369*. Тонкая гибкая веревка длиной $l = 1$ м и массой $M = 1$ кг подвешена концами к потолку. Расстояние между точками подвеса $d = 0,5$ м. Найдите натяжение веревки в нижней точке и на половине высоты «провиса».

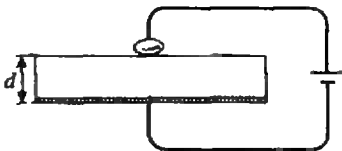
А. Зильберман

Ф1370. Кубический сосуд объемом $V = 1$ л заполнен воздухом. Одна из стенок (1) поддерживается при температуре T_1 , противоположная ей (2) — при температуре T_2 , остальные стенки теплоизолированы. Найдите отношение средних частот соударений молекул со стенками 1 и 2. Рассмотрите два случая: а) давление в сосуде равно атмосферному $p_0 = 1$ атм; б) сосуд откачан до давления $p = 10^{-9}$ атм.

А. Семаков

Ф1371. На нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины толщиной d и диэлектрической проницаемостью ϵ нанесено проводящее покрытие. На верхнюю поверхность помещена маленькая капля ртути, которая не смачивает пластину. Капля и проводящее покрытие образуют конденсатор (см. рисунок). При каком напряжении батареи капля начнет растекаться по поверхности пластины? Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ .

Д. Куцов



Ф1372. К батарейке напряжением U_0 подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L . В некоторый момент параллельно катушке подключают еще один конденсатор емкостью C . Каким может быть максимальный заряд этого конденсатора? Сопротивление проводов и внутреннее сопротивление батарейки считайте малыми.

А. Зильберман

Решения задач

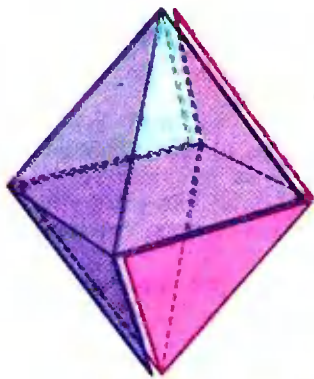
M1331 — M1335, Ф1348 — Ф1352

M1331. Из бумаги склеены два одинаковых правильных тетраэдра. Какое наименьшее число ребер этих тетраэдров придется разрезать, чтобы затем склеить их по разрезанным ребрам в один правильный октаэдр?

Ответ: 6. Легко изготовить правильный октаэдр из двух тетраэдров, у каждого из которых разрезаны три ребра, выходящих из одной вершины (основания этих тетраэдров будут служить противоположными гранями октаэдра, как показано на рисунке).

С другой стороны, меньшим числом разрезов обойтись нельзя. Ведь к каждой вершине октаэдра должно подходить не менее двух склеенных ребер: если к какой-то вершине A примыкало бы лишь одно такое ребро, то все примыкающие к A четыре треугольника должны были бы принадлежать одному тетраэдру (их углы с вершиной A вместе составляли бы в сумме $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$), а к вершине тетраэдра примыкают лишь три грани (с суммой

Задачник „Квант“



углов 180°). Поскольку у октаэдра шесть вершин, то концов у склеенных ребер должно быть не менее $6 \cdot 2$, а значит, этих ребер — не менее 6.

Более интересный вопрос: можно ли склеить из 5 правильных тетраэдров, разрезанных по ребрам, поверхность правильного икосаэдра — 20-гранника, в каждой вершине которого сходится по 5 треугольников, и если можно, то сколько ребер для этого нужно разрезать. Если выясните — напишите нам об этом.

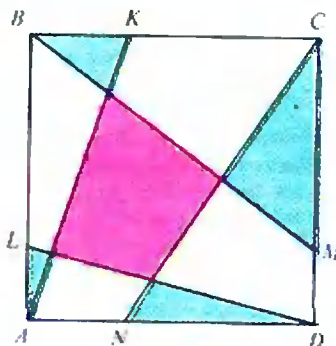
Е. Безуг

M1332. Отрезки AK , BM , CN , DL делят квадрат $ABCD$ со стороной 1 на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 и пять четырехугольников; площадь центрального четырехугольника равна S_0 , причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ (см. рисунок: сумма площадей голубых треугольников равна площади розового четырехугольника). Докажите равенство

$$AL + BK + CM + DN = 2.$$

Разность между суммой площадей четырех треугольников DAL , ABK , BCM , CDN и площадью квадрата равна разности между суммой площадей голубых треугольников и розового четырехугольника, т. е. по условию она равна 0:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S_0 = 0.$$



Записывая площадь каждого из четырех треугольников DAL , ABK , BCM , CDN как половину произведения катетов (один из катетов — сторона квадрата, равная 1), получим требуемое равенство:

$$\frac{AL}{2} + \frac{BK}{2} + \frac{CM}{2} + \frac{DN}{2} = 1.$$

Заметим, что аналогичное утверждение будет справедливо также, если вместо квадрата $ABCD$ рассмотреть ромб (поскольку у ромба все высоты равны).

С. Сефибеков

M1333. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$a^2(2b + 2c - a) + b^2(2c + 2a - b) + c^2(2a + 2b - c) \geq 9abc.$$

Первое решение. Поделим левую и правую части неравенства на c^3 и введем обозначения

$$x = a/c; \quad y = b/c.$$

Тогда неравенство переписывается так:

$$f(x, y) = x^2(2 + 2y - x) + y^2(2 + 2x - y) + 2x + 2y - 1 \geq 9xy. \quad (*)$$

Задача „Кванта“

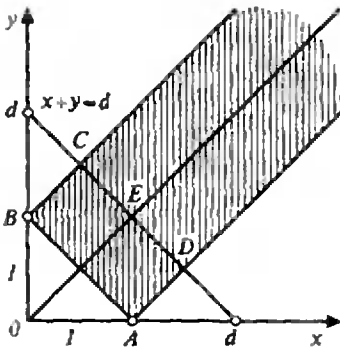


Рис. 1.

Мы должны доказать неравенство (*) при $x+y > 1$, $x+1 > y > x-1$, т. е. для точек (x, y) , расположенных внутри полосы, заштрихованной на рисунке 1.

Заметим сначала, что $f(x, y) = f(y, x)$, так что функция f принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно прямой $y = x$.

В точках полосы, принадлежащих прямой $y = x$, функция f неотрицательна, так как

$$f(x, x) = (x-1)^2(2x-1),$$

а из неравенства $x+y > 1$ при $x=y$ следует, что $x > 1/2$.

Посмотрим, какие значения принимает функция $f(x, y)$ в точках прямой $x+y=d$, где $d > 1$ (см. рис. 1). Эта прямая пересекает прямую $y=x$ в точке $(d/2; d/2)$. Выразив y через x и подставляя в (*), получим неравенство

$$g(x) = f(x, d-x) \geq 0.$$

Функция $g(x)$ — это квадратный трехчлен, принимающий равные значения в точках, симметричных относительно точки $x_0 = d/2$, ибо

$$g(x) = f(x, d-x) = f(d-x, x) = g(d-x).$$

Это значит, что точка x_0 — абсцисса вершины параболы $y = g(x)$. В то же время при $y = x - 1$, т. е. при $a = b + c$, исходное неравенство после простых преобразований приводится к очевидному неравенству $b^2 + c^2 \geq 2bc$, так что неравенство (*) справедливо при $x+y=d$, $y = x - 1$, т. е.

$$g\left(\frac{d+1}{2}\right) \geq 0.$$

Следовательно, функция $g(x)$ неотрицательна при всех x из промежутка $\left(\frac{d-1}{2}; \frac{d+1}{2}\right)$, т. е. неравенство (*) выполняется для всех точек отрезка CD , что и завершает доказательство. Нетрудно понять, что равенство в (*) возможно лишь при $x=y=1$, т. е. равенство в исходном неравенстве возможно только тогда, когда $a=b=c$.

Второе решение. Пусть x, y, z — отрезки, на которые вписанная в треугольник со сторонами a, b, c окружность делит стороны треугольника (рис. 2).

Тогда

$$a = x + y, \quad b = x + z, \quad c = y + z,$$

и исходное неравенство преобразуется к виду

$$(x+y)^2(4z+x+y) + (x+z)^2(4y+x+z) + (y+z)^2(4x+y+z) \geq 9(x+y)(x+z)(y+z).$$

Вычитая из левой части неравенства его правую часть, приходим после преобразований к неравенству

$$2(x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y + 3xyz) \geq 0,$$

или

$$3xyz \geq x^2(y+z-x) + y^2(x+z-y) + z^2(x+y-z).$$

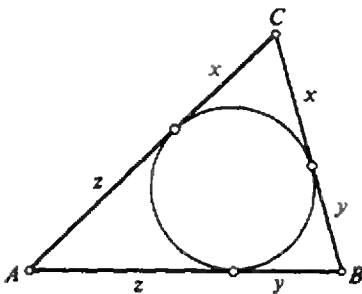


Рис. 2.

Задачник „Кванта“

Поскольку (убедитесь в этом!)

$$x^2(y+z-x) + y^2(x+z-y) + z^2(x+y-z) - 2xyz = \\ = (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y),$$

получаем неравенство

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y), \quad (**)$$

справедливость которого при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ мы должны доказать. Если среди сомножителей в правой части нечетное число отрицательных, то все ясно. Два сомножителя не могут быть отрицательными (это противоречило бы положительности x , y и z).

Если все три сомножителя положительны, то, перемножив три очевидных неравенства

$$x^2 \geq x^2 - (y-z)^2 \geq 0,$$

$$y^2 \geq y^2 - (x-z)^2 \geq 0,$$

$$z^2 \geq z^2 - (x-y)^2 \geq 0,$$

получим неравенство, из которого (**) немедленно получается.

Л. Курляндчик, В. Сендеров

М1334. Можно ли числа $1, 2, \dots, 10$ разбить на два подмножества так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась на 11?

Будем пользоваться тем, что остаток от деления на 11 суммы (разности, произведения) нескольких чисел равен соответственно остатку от деления на 11 суммы (разности, произведения) остатков этих чисел; тот факт, что числа a, b дают равные остатки при делении на 11, будем записывать так: $a \equiv b$. Например,

$$6 \equiv -5, \quad 7 \equiv -4, \quad 8 \equiv -3, \quad 9 \equiv -2, \quad 10 \equiv -1. \quad (*)$$

Предположим, что числа $1, 2, \dots, 10$ удалось разбить на две группы так, что произведения a и b чисел в этих группах дают равные остатки при делении на 11.

Заметим, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120 \equiv -1$, поэтому $ab = 10! \equiv 5! \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \equiv -(5!)^2 \equiv -1$. (**)

Если бы выполнялось условие $a \equiv b$, то из (**) следовало бы равенство $a^2 \equiv -1$. Но ни один из квадратов не дает остатка $-1 \equiv 10$ при делении на 11. Достаточно проверить это для квадратов первых пяти остатков

$$1^2 \equiv 1, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 4^2 = 16 \equiv 5, \quad 5^2 = 25 \equiv 3,$$

для следующих чисел, как видно из (*), остатки квадратов будут теми же самыми.

Утверждение задачи будет справедливо, если 11 заменить на любое простое число p вида $4k+3$. В самом деле, во-первых, $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ для любого простого p (теорема Вильсона). А во-вторых, если p — простое число вида $4k+3$, то не существует x такого, что $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Ведь если такое x существует, то среди остатков чисел $1^2, 2^2, \dots, (2k+1)^2$ (это — всевозможные различные остатки квадратов по модулю p) должна

Задачник „Квант“

наблюдаться симметрия: вместе с каждым остатком $a^2 \equiv r$ должен был бы встречаться и остаток $(xa)^2 \equiv -a^2 \equiv -r \equiv p-r$. Но из такой симметрии следовало бы, что этих остатков — четное количество. (Здесь использован тот факт, что $x^2 \equiv y^2$ только в том случае, если $x \equiv y$ или $x \equiv -y$.)

И. Вайнштейн, Н. Васильев

М1335. n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разламывать не более одного раза.

а) При каких n это возможно, если $m=9$?

б) При каких n и m это возможно?

Ответ: а) при $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18$;

б) при $n \leq m$ или $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$ для некоторого k .

Рассмотрим сразу пункт б) задачи, универсальный способ раздела шоколадок, годящийся для всех случаев, когда такой раздел возможен, таков: расположим шоколадки одну за другой в одну линию, и разрежем получившуюся шоколадную полоску равномерно на n частей (на рисунке 1 показан такой раздел для $m=9, n=7$). Выясним, в каких случаях при таком способе раздела по каждой шоколадке пройдет не более одного разреза.



Рис. 1.

Назовем количество шоколада, которое должен получить каждый школьник (равное $\frac{m}{n}$ от целой шоколадки) *порцией*. Ясно, что если $n \leq m$, то порция будет больше одной шоколадки, поэтому расстояние между разрезами будет больше длины шоколадки. Следовательно, в этом случае по каждой шоколадке пройдет не более одного разреза.

Пусть теперь $n = m + 1$. В этом случае порция равна $\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ от целой шоколадки. Заметим, что при описанном способе раздела каждая шоколадка делится на части, кратные $\frac{1}{n}$ от целой шоколадки, значит, расстояние от линии разреза до края шоколадки должно быть не менее $\frac{1}{n}$. Поэтому два разреза, проходящие по одной шоколадке, вырезали бы из нее часть, не меньшую $1 - \frac{2}{n}$, что составляет меньше порции (рис. 2). Значит, и в этом случае каждая шоколадка окажется разрезанной не более одного раза.

Наконец, если $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$ для некоторого k , то все шоколадки разбиваются на $\frac{m}{k-1}$ групп по $k-1$ шоко-

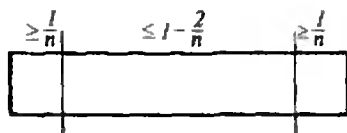


Рис. 2.

Задачник „Квант“

ладке в каждой. Каждая из этих групп шоколадок делится между k школьниками, при этом выполнение условия задачи следует из разобранных выше случаев.

Теперь докажем, что раздел шоколадок, удовлетворяющий условию, возможен, только если $n \leq m$ или

$$\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k} \text{ для некоторого } k. \text{ Для этого предположим,}$$

что мы осуществили такой раздел, и $n > m$. Поскольку порция в этом случае меньше целой шоколадки, то каждая шоколадка должна быть разломана. Таким образом, мы имеем $2m$ кусков — частей шоколадок. Расположим эти куски в порядке возрастания размера и обозначим их подряд: a_1, a_2, \dots, a_{2m} . Очевидно, что каждая из пар a_1 и a_{2m} , a_2 и a_{2m-1} и т. д. составляют вместе по целой шоколадке. Кроме того, a_{2m} в точности равна порции. Действительно, если бы школьник, получивший часть a_{2m} , получил бы еще какой-то кусочек, то, поскольку этот кусочек не может быть меньше, чем a_1 , всего ему досталось бы не меньше, чем целая шоколадка, что больше порции.

Докажем по индукции, что каждый кусок a_i кратен a_1 . База индукции очевидна — a_1 кратен самому себе. Предположим, что все куски a_i при $i < l$ кратны a_1 . Рассмотрим a_{2m+1-l} — дополнение a_l до целой шоколадки. Этот кусок может быть дополнен до порции кусочками, меньшими a_l , которые все кратны a_1 по предположению индукции. Порция, в свою очередь, дополняется до целой шоколадки кусочком a_1 . Поэтому дополнение рассматриваемого куска до целой шоколадки кратно a_1 . Это дополнение и есть a_l . Утверждение доказано.

Поскольку кусок a_{2m} кратен a_1 и дополняется им до целой шоколадки, то и целая шоколадка кратна a_1 . Значит, a_1 составляет $\frac{1}{k}$ часть целой шоколадки для некоторого k . Отсюда следует, что a_{2m} составляет $\frac{k-1}{k}$ от целой шоколадки. С другой стороны, a_{2m} составляет порцию. Поэтому $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$.

Д. Бугаенко, Н. Константинов

Ф1348*. Однородный резиновый шнур длиной L прикреплен одним концом к стене. Другой его конец в некоторый момент времени начинают двигать вдоль шнура со скоростью v , равномерно растягивая его при этом. В тот же момент от закрепленного конца вдоль шнура начинает двигаться жук, скорость которого относительно опоры (шнура) постоянна и рав-

Эту задачу предложили в начале 1992 года на сборах по подготовке к Международной физической олимпиаде.*) Несколько ребят решили ее самыми разными способами, а одно из решений оказалось очень изящным и простым — его придумал Дима Арбатский из Санкт-Петербурга. Он рассуждал так.

Длина шнура увеличивается со временем по закону $l = L + vt$. Это значит, что все отрезки со временем удлиняются таким же образом. Будем считать, что длина шнура остается равной L , а ноги жука укорачиваются

* Похожая задача приведена в книге М. Гарднера «Путешествие во времени» (М.: Мир, 1990, с. 132) и в восьмом номере журнала «Природа» за 1990 год (специальный выпуск, посвященный А. Д. Сахарову).

на u .*) При каких условиях жук сможет добраться до конца шнура? За какое время он это сделает? На каком максимальном расстоянии от подвижного конца шнура он окажется во время движения? Считайте, что шнур деформируется без разрыва.

Задача «Квант»

так, что его скорость равна $u^* = \frac{uL}{L+vt}$. Теперь запишем очевидное равенство

$$\int_0^T u^* dt = L,$$

откуда для времени T получим

$$T = \frac{L}{v} (e^{v/u} - 1).$$

Для того чтобы найти максимальное расстояние, которое отделяет жука от подвижного конца шнура, нужно заняться арифметикой. Через время t на «сжатом» шнуре жуку остается пробежать

$$x^*(t) = L - L \frac{u}{v} \ln \left(1 + \frac{vt}{L} \right).$$

На растянутом шнуре это расстояние превращается в

$$x(t) = (L + vt) \frac{x^*(t)}{L} = L \left(1 + \frac{vt}{L} \right) \left(1 - \frac{u}{v} \ln \left(1 + \frac{vt}{L} \right) \right).$$

Приравняем производную по времени нулю и найдем момент t_1 , в который расстояние $x(t_1)$ максимально:

$$\ln \left(1 + \frac{vt_1}{L} \right) = \frac{v}{u} - 1,$$

$$t_1 = \frac{L}{v} \left(e^{\frac{v}{u} - 1} - 1 \right),$$

т. е. при $v \gg u$ время t_1 примерно в e раз меньше всего времени путешествия. Окончательно

$$x_{\max} = L \frac{v}{u} e^{\frac{v}{u} - 1}.$$

Это расстояние может оказаться в невообразимое число раз больше, чем L (в наиболее интересном случае — когда $v \gg u$).

А. Зильберман

Ф1349. На гладкий вертикальный стержень насажены тяжелая шайба массой M и легкая шайба массой $m = M/1000$. Легкой шайбе сообщают скорость, равную v и направленную так, как показано на рисунке. На какой высоте над подставкой может нахо-

Понятно, что тяжелая шайба (тело) удерживается на некоторой высоте H благодаря тому, что между ней и горизонтальной плоскостью «прыгает» легкая шайба (частица). В равновесном состоянии должно выполняться условие

$$Mg = 2m v v \approx 2m v \frac{v}{2H} = \frac{m v^2}{H},$$

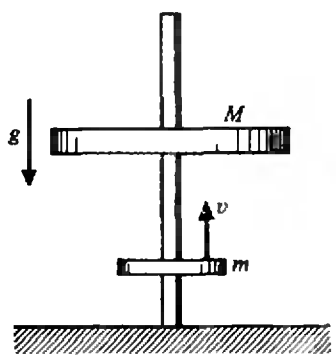
где $v = v/(2H)$ — число ударов в секунду шайб друг о друга. Отсюда получаем

$$H = \frac{m v^2}{Mg}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда наш «поршень» смещен из равновесного положения. Пусть в некоторый

* К сожалению, в опубликованном ранее условии задачи в этом месте допущена опечатка. Редакция приносит свои извинения читателям.

даться тяжелая шайба, не смещаясь заметно вверх или вниз? Каким будет период малых колебаний такого «поршня», если его сместить из этого равновесного положения? Все удары считать абсолютно упругими.



Задача «Кванта»

момент тело движется вниз со скоростью $V \ll v$. Тогда после каждого удара частица увеличивает свою скорость на $2V$. Таким образом, за время t тело, пройдя путь Vt , совершает работу

$$A = \frac{1}{2} m (v + 2vVt)^2 - \frac{1}{2} mv^2 \approx 2mvvVt,$$

приводящую к тому, что скорость частицы теперь равна $v + 2vVt$, а действующая на «поршень» сила —

$$F = \frac{m}{H} (v + 2vVt)^2 \approx Mg \left(1 + \frac{2Vt}{H} \right).$$

Для малых колебаний справедливо равенство

$$F = -kx.$$

В нашем случае

$$x = Vt \text{ и } k = 2Mg/H,$$

откуда для периода колебаний получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{2g}} = 2\pi \frac{v}{g} \sqrt{\frac{m}{2M}}.$$

А. Андрианов, М. Цыпин

Ф1350. На бирже «АНФИ-СА» 1917 брокерских и 1992 хакерских места. Между каждой парой БМ включен резистор сопротивлением 1 кОм, между каждой парой ХМ — резистор сопротивлением 2 кОм, между каждым БМ и ХМ — 4 кОм. Чему равно сопротивление, измеренное между двумя БМ? Между двумя ХМ? Между БМ и ХМ?

Вначале найдем сопротивление $Z_{ББ}$ между парой брокерских мест. Подключим источник к каким-либо двум точкам $БМ_1$ и $БМ_2$ (ясно, что все равно к каким именно) и упростим схему (рис. 1). Все оставшиеся 1915 БМ и 1992 ХМ имеют одинаковые потенциалы, и всё, что их между собой соединяет, можно спокойно выбросить (для расчета схемы, разумеется!). Тогда получится схема, изображенная на рисунке 2. Сопротивление теперь (после замены $R_{ББ}$ на два параллельно соединенных резистора сопротивлением $2R_{ББ}$ каждый) легко подсчитать:

$$\frac{1}{Z_{ББ}} = \frac{1}{2R_{ББ}/1917} + \frac{1}{2R_{БХ}/1992},$$

откуда

$$Z_{ББ} \approx 0,83 \text{ Ом.}$$

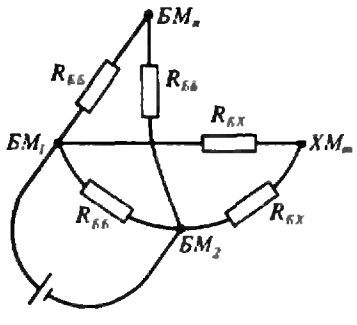


Рис. 1.

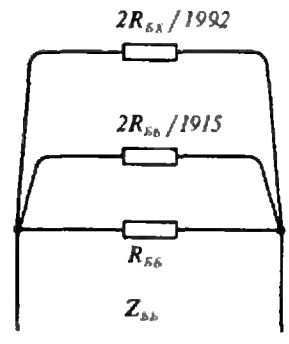


Рис. 2.

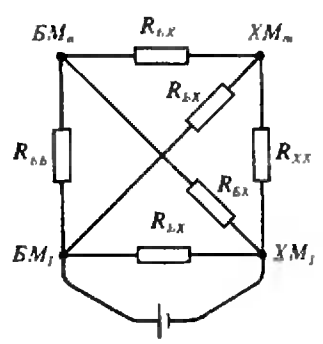


Рис. 3.

Эрудитик „Кванта“

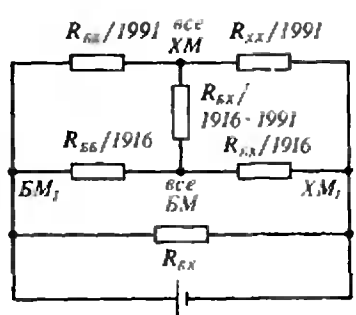


Рис. 4.

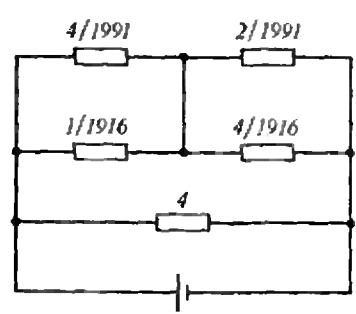


Рис. 5.

Совершенно аналогично можно подсчитать $Z_{ХХ}$:

$$Z_{ХХ} = Z_{ББ} \approx 0,83 \text{ Ом.}$$

Расчет $Z_{БХ}$ несколько сложнее (рис. 3) — не все резисторы теперь можно выбросить: у всех оставшихся БМ потенциалы одинаковы, у всех ХМ тоже, но потенциалы получившихся двух групп неодинаковы. Так что схема хотя и упрощается, но все же не до самого конца (рис. 4). Можно, конечно, и получившийся «мостик» рассчитать, но заметим, что в его диагональ включен резистор совсем уж малого сопротивления $R_{БХ}/(1916 \cdot 1991)$, который можно заменить кусочком провода (рис. 5). Тогда

$$Z_{БХ} \approx 1,1 \text{ Ом.}$$

И. Потеряйко

Р. С. Зачем было соединять — непонятно. Сложное это дело, биржа!

Ф1351. Медный диск массой m и диаметром D может свободно вращаться вокруг закрепленной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Центр и край диска соединены резистором сопротивлением R при помощи скользящих контактов. Вся система помещена в однородное магнитное поле B , параллельное оси диска. Диск раскручивают до угловой скорости ω_0 и отпускают. Сколько оборотов сделает диск до полной остановки? Теперь последовательно с резистором включим батарею напряжением U_0 . За какое время диск раскрутится из состояния покоя до угловой скорости ω_0 ?

Докажем, что для любого (вообще говоря, достаточно сложного) распределения по диску токов, текущих к центру от скользящего контакта на периферии, момент сил, действующий на диск, будет таким же, как если бы ток тек по радиусу, идущему к контакту. Рассмотрим кольцо с радиусами r и $r + \Delta r$ и посмотрим, какой момент сил оно создает; важно, что вклад в момент дает только радиальная компонента скорости носителей зарядов:

$$\Delta M = \sum \Delta Fr = \sum qv_{\text{ра}} Br = iBr \Delta r,$$

где i — полный ток. Тогда полный момент сил равен

$$M = \sum \Delta M = \sum iBr \Delta r = \frac{1}{8} iBD^2.$$

Учитывая, что момент инерции диска $I = 1/2 m (D/2)^2$, получаем уравнение движения диска

$$I \omega' = M, \text{ или } \frac{1}{8} mD^2 \omega' = \frac{1}{8} iBD^2,$$

откуда

$$\omega' = \frac{iB}{m}.$$

Теперь осталось найти ток. В диске возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = \sum \omega r B \Delta r = \frac{1}{8} \omega BD^2.$$

Для первого случая, согласно закону Ома,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega BD^2}{8R}.$$

Задача „Кванта“

Таким образом,

$$\omega' = -\frac{B^2 D^2}{8mR} \omega \quad (\text{диск тормозится!}),$$

или

$$\Delta\omega = -\frac{B^2 D^2}{8mR} \omega \Delta t = -\frac{B^2 D^2}{8mR} \Delta\varphi.$$

Суммируя, получим

$$-\omega_0 = -\frac{B^2 D^2}{8mR} \varphi_{\text{полн}},$$

откуда найдем полный угол поворота диска до остановки —

$$\varphi_{\text{полн}} = \frac{8mR\omega_0}{B^2 D^2}$$

и число оборотов до остановки —

$$N = \frac{\varphi_{\text{полн}}}{2\pi} = \frac{4mR\omega_0}{\pi B^2 D^2}.$$

Если последовательно с резистором включена батарея, то закон Ома принимает вид

$$i = \frac{U_0 - \mathcal{E}}{R} = \frac{U_0 - \omega B D^2 / 8}{R}.$$

Тогда

$$\omega' = \frac{U_0 B}{mR} - \frac{B^2 D^2}{8mR} \omega,$$

$$\omega(t) = \frac{8U_0}{B D^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 D^2}{8mR} t} \right).$$

В некоторый момент t_x

$$\omega(t_x) = \omega_0,$$

откуда

$$t_x = \frac{8mR}{B^2 D^2} \ln \left(1 - \frac{\omega_0 B D^2}{8U_0} \right).$$

М. Цылин

Ф1352. Катушка индуктивностью $L=1$ Гн намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. Катушку подключают к выводу генератора звуковой частоты последовательно с амперметром переменного тока (рис. 1). Конденсатор емкостью $C=1$ мкФ подключен к отводу от сере-

В катушке с ферромагнитным кольцевым сердечником линии магнитной индукции практически не «уходят» из сердечника, и магнитный поток через каждый из витков один и тот же. Из этого сразу следует, что напряжения на половинах катушки совершенно одинаковы — они ведь определяются магнитными потоками этих половин. Следовательно, напряжение на конденсаторе равно половине напряжения генератора:

$$U_C = \frac{1}{2} U_0 \cos \omega t,$$

а ток через конденсатор равен (рис. 2)

дины катушки. Найдите амплитуду тока через амперметр в зависимости от частоты ω генератора и сдвиг фаз между этим током и напряжением генератора. То же — для тока, потребляемого схемой от генератора. Амплитуда напряжения генератора $U_0 = 1$ В. Сопротивления амперметра и источника считать малыми.

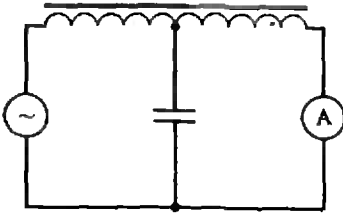


Рис. 1.

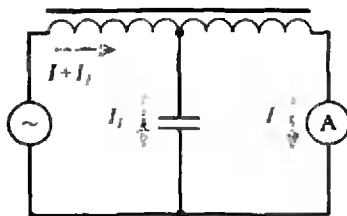


Рис. 2.

Задача „Кванта“

$$I_1 = \frac{1}{2} U_0 \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \omega C U_0 \sin \omega t.$$

Сразу найдем и его производную — дальше пригодится:

$$I_1' = -\frac{1}{2} \omega^2 C U_0 \cos \omega t.$$

Магнитное поле B в сердечнике складывается из полей всех витков, поле каждого витка пропорционально его току:

$$B = \frac{n}{2} A (I + I_1) + \frac{n}{2} A I,$$

где n — число витков в катушке, A — коэффициент пропорциональности. Магнитный поток через всю катушку равен

$$\Phi = B S n = A n^2 S \left(I + \frac{1}{2} I_1 \right),$$

где S — площадь сечения катушки. Если бы конденсатора не было, т. е. катушка была бы подключена «без всяких фокусов», то выполнялось бы условие

$$\Phi^* = A n^2 S I^* = L I^*,$$

откуда

$$A n^2 S = L.$$

И наконец, запишем уравнение для напряжения на катушке в нашей цепи:

$$U = \Phi' = A n^2 S \left(I' + \frac{1}{2} I_1' \right) = L I' + \frac{1}{2} L I_1' = U_0 \cos \omega t,$$

или

$$L I' = U_0 \cos \omega t - \frac{1}{2} L I_1' = U_0 \left(1 + \frac{1}{4} \omega^2 L C \right) \cos \omega t.$$

Отсюда сразу найдем ток через амперметр —

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \left(1 + \frac{1}{4} \omega^2 L C \right) \sin \omega t,$$

его амплитуду в зависимости от частоты генератора —

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L} \left(1 + \frac{1}{4} \omega^2 L C \right)$$

и сдвиг фаз между этим током и напряжением конденсатора —

$$\varphi = -\pi/2.$$

Ток, потребляемый схемой от генератора, равен

$$I_r = I + I_1 = \frac{U_0}{\omega L} \left(1 - \frac{1}{4} \omega^2 L C \right) \sin \omega t.$$

Следовательно, его амплитуда равна

$$I_{r0} = \frac{U_0}{\omega L} \left(1 - \frac{1}{4} \omega^2 L C \right),$$

а сдвиг фаз между ним и напряжением генератора —

$$\varphi_r = -\pi/2 \text{ при } \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}} \text{ и } \varphi_r = \pi/2 \text{ при } \omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

А. Зильберман

„Квант” для младших школьников

Задачи

1. На свой день рождения фрекен Бок испекла огромный торт. Известно, что Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и фрекен Бок. После того, как торт съели, Карлсон весил столько же, сколько фрекен Бок и Малыш. Докажите, что кусок торта, который съел Карлсон, весит столько же, сколько весила фрекен Бок до своего дня рождения.

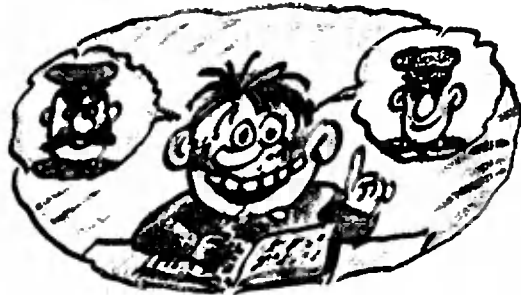
2. Расшифруйте арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Алеша и Витя начали коллекционировать значки. Хотя у Вити количество значков меньше утроенного числа значков Алеши, но даже в том случае, если Витя отдаст четыре значка Алеше, у него останется больше значков, чем станет у Алеша. По сколько значков у каждого из ребят, если всего у них меньше двадцати значков?

4. В середине учебного года в классе Степы Мошкина сменился милиционер, который вел занятия по правилам дорожного движения. Дотошный Степа выяснил, что год рождения первого милиционера равен сумме номеров страниц «Правил дорожного движения», которые он изучил под его руководством, а год рождения второго милиционера равняется сумме номеров оставшихся страниц. На сколько лет один преподаватель старше другого?

5. Лист фанеры размером 10×10 дм распилили на 20 прямоугольников, стороны которых составляют целое число дециметров. Оказалось, что общая длина пропилов равна 100 дм. Докажите, что у каждого из этих прямоугольников найдется сторона длиной в 1 дм.

Эти задачи нам предложили А. Кохась, А. Ларионов, Н. Антонович, И. Акулич и В. Произволов.



Калейдоскоп „Кванта“

Факториал

В 30-х годах во многих квартирах на видном месте стояли шеренги из семи слоников. Считалось, что они приносят счастье, как и подкова, прибитая над дверью. Слоников выстраивали по росту. А сколько еще существует способов расставить

Оставшийся предмет занимает последнее место, не увеличивая количества вариантов, число которых равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

В то недавнее время, когда Югославия была Федерацией шести республик, на ее флаге, состоявшем из трех горизонтальных по-



их на полке? Семь? Шестьдесят? Пятьсот? Оказывается, что больше пяти тысяч! Давайте поймем, откуда берется такое большое число. Один предмет и устанавливается единственным образом. Два — уже двумя способами. Если вы с приятелем входите в комнату, то либо сначала входит он, а потом вы, либо, наоборот, сначала вы, а потом он. Три предмета можно расставить уже шестью различными способами. Действительно, первое место может занимать любой из них (3 варианта), после этого второе место может занять любой из оставшихся двух, т. е. каждый из первоначальных вариантов удваивается.

лос красного, белого и синего цвета, красовалась и большая пятиконечная звезда. Точно такие же флаги были и у всех республик, различие состояло лишь в порядке чередования цветов. А, как мы знаем, различных вариантов такого чередования также ровно шесть, при этом флаг одной из республик



(Сербия) совпадал с государственным флагом всей страны. Если мы зададимся вопросом о числе пе-

рестановок четырех предметов, то получим, что на первое место можно поставить любой из них, последующие три места оставшиеся три предмета могут занимать $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. Таким образом, общее число способов равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Теперь вы сами легко покажете, что количество способов расставить n предметов равно $n(n-1) \dots 2 \cdot 1$. Это выражение довольно громоздко, но встречается во многих задачах, поэтому для него придумали специальное обозначение $n!$, которое называют *эн факториал* от английского слова *factor* — множитель.

Вернемся к нашим слоникам. Их семь, поэтому число их пе-

рестановок равно $7! = 5040$, поистине огромное число!

Факториал появляется не только в ситуации, связанной с перестановками элементов. Нетрудно показать, что $n!$ производная от функции x^n равна $n!$. Факториал можно рассматривать как функцию, определенную для натуральных значений переменной, но работать с ней трудно — ее нельзя продифференцировать или проинтегрировать. Поэтому важно уметь ее оценивать более простыми функциями, например, имеют место следующие неравенства:

$$n! > n! > n^{n/2}$$

Первое из них следует из того, что в произведении $n!$ каждый множитель не



рестановок равно $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. А

больше n , а второе — из того, что произведение множителей, равностоящих один от одного конца, а другой — от другого, не меньше n .

Удилось найти и непрерывную функцию, принимающую значение $n!$ при значении аргумента, равного n . Такую функцию предложил Леонард Эйлер, назвав ее *гамма-функцией*:

сколькими способами можно сложить колоду из 36 карт? Разумеется, $36!$ способами, что прибли-



$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Для этой функции справедливо равенство $\Gamma(n+1) = n!$. Нетрудно вычислить, что $\Gamma(1) = 1$, поэтому (и не только поэтому) принято считать, что $0! = 1$. Еще одна функция, введенная Л. Эйлером, также напрямую связана с факториалом — *бета-функция*:

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Рассмотрим еще одну задачу. В волейбольной команде 10 игроков. На площадку выходят шестеро, а четверо в это время находятся «в запасе». Сколькими способами можно выбрать игровую шестерку? Начнем рассуждать так же, как и раньше: первого игрока можно выбрать десятью способами, второго — девятью, ..., шестого — пятью. Итого $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ способов. Но при этом одну и ту же шестерку игроков мы будем выбирать многократно, поскольку они могут входить в шестерку в разном порядке, а это можно сделать $6!$ способами. Значит, количество способов

равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 / 6! = 210$. Если это выражение умножить и разделить на $4!$, то мы получим $10! / (6! 4!)$; вообще, количество способов выбрать k элементов из n равно

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Это выражение также имеет специальное обозначение, даже

два: C_n^k и $\binom{n}{k}$.

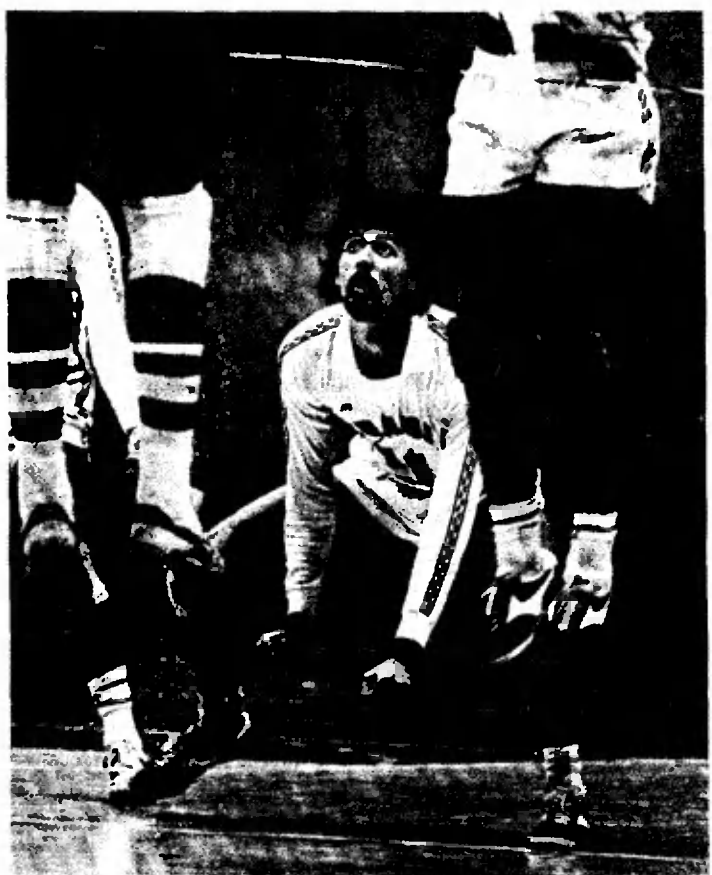
Уже упоминалось, что пользование функцией $n!$ очень затруднительно, поэтому для нее используют приближенные формулы, например формулу, предложенную в 1730 году английским математиком Дж. Стирлингом:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Обозначение $n!$ оказалось очень удобным и было расширено на другие произведения. Так произведение $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$ стали обозначать через $(2n)!!$, а $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)$ — через $(2n+1)!!$. Конечно же, $(2n)!!$ не то же самое, что $((2n)!)!$ — второе число много

больше первого. Вытует и более общее обозначение $(kn+p)!! = p(k+p)(2k+p) \dots (nk+p)$.

А студенты физфака МГУ на эмблеме своего факультета поместили факториал под знак радикала.



Материал подготовил А. Савин

ОШЕЛОМЛЯЮЩЕЕ ВПЕЧАТЛЕНИЕ

Д. КОЛИДЕИ

Для решения некоторых физических задач требуются вычисления высочайшей точности. Однако решение многих других задач может быть и приближенным. Физики гордятся тем, что могут быстро отвечать на вопросы, требующие ответа «с точностью до порядка», делая приближенные оценки, основанные на здравом смысле. Вот типичный пример:

Сколько атомов резины стирается с шины автомобильного колеса при каждом его обороте?

Задачи такого рода обычно называют задачами Ферми — по имени великого физика Энрико Ферми, который обладал величайшим искусством не только ставить подобные задачи, но и быстро и изящно решать их.

Без сомнения, у вас уже возникло несколько вопросов.

Да, конечно. Прежде всего — имеет ли данная задача какое-либо практическое значение?

Возможно, и не имеет, однако в постановке задачи просматривается любопытная связь между миром бесконечно малых (атомов) и макромиром (автомобилем). А фактически цель этой задачи — помочь вам понять, как следует делать оценки.

В формулировке этой задачи нет цифровых данных. С чего же начать?

Мы должны сами задать исходные данные — радиус покрышки, суммарную массу резины и т. д.

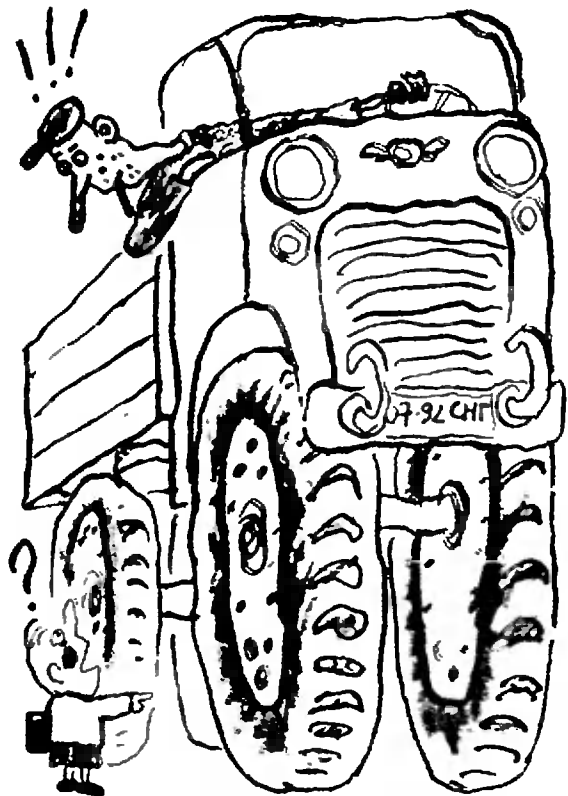
Но это вымышленные данные. Как же при этом мы сможем получить точный ответ?

Статья заимствована из русско-американского журнала «Quantum». Автор статьи, написанной в форме диалога с читателем, — заслуженный профессор физики в отставке Питсбургского университета. Перевела с английского И. Вахурица.

Если под словом «точный» понимать ответ, получивший положительную оценку при обычной экспертизе, то вы правы. Но в задачах такого рода под «точностью» понимают «точность до какого-то порядка», и, задавая исходные данные для подобных задач, сильно ошибиться достаточно трудно.

Понятно. С чего же мы начнем?

С составления плана решения задачи — мы определим объем резины, которая стирается с шины, а затем разделим его на объем атома. Это и будет искомый результат. Сначала займемся резиной.



Согласен. И все же я не представляю, как определить объем резины, которая стирается с шины при каждом обороте колеса.

Его можно узнать, определив объем резины, которая была стерта с шины за все время ее эксплуатации, и число оборотов колеса за это время. Разделив одно на другое, мы найдем объем резины, стираемой за один оборот колеса.

Пусть R — внешний радиус шины, d — ее ширина, h — глубина стирания резины и L — расстояние, которое прошло колесо за все время его эксплуатации. Число оборотов колеса N равно расстоянию, которое прошло колесо, деленному на длину окружности обода шины:

$$N = \frac{L}{2\pi R}.$$

Объем всей резины V есть объем цилиндра толщиной h :

$$V = 2\pi R d h.$$

Тогда объем резины, стираемой с шины при одном обороте колеса, равен

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{2\pi R d h}{L/(2\pi R)} = \frac{40R^2 d h}{L}.$$

Отметим, что мы заменили π^2 на 10, что вполне допустимо, если учесть цели, которые мы преследуем.

Но ведь нет никакой необходимости заменять π^2 на 10. Мой калькулятор показывает 9.87.

Вам кажется, что если вы не сделаете такой замены, ответ будет более точным? Наверное. Однако наши последующие вычисления будут настолько приблизительными, что такой потерей точности можно свободно пренебречь. Кроме того, с числом 10 гораздо приятнее иметь дело.

Хорошо, допустим. Что дальше?

Мы уже достигли большого прогресса, сведя решение задачи к оперированию с величинами, которые можем определить. Скоро мы это сделаем. А пока давайте немного поразмышляем об атомах.

Мне все время не давал покоя вопрос, что такое «атом резины»? Я ду-

маю, мы не найдем такого элемента в периодической таблице.

Вы, конечно, правы. Резина состоит из молекул, которые представляют собой длинные цепочки атомов водорода, углерода и кислорода. Однако в данной задаче нас интересуют некие абстрактные атомы, радиус которых мы обозначим r .

Понятно. Значит, объем V_a такого абстрактного атома есть объем сферы радиусом r , т. е. $V_a = (4\pi/3)r^3$. Правильно?

Можно сказать и так. Однако лучше (и проще) положить $V_a = (2r)^3$. Такое допущение означает, что мы считаем атомы крохотными кубиками, а это дает возможность учесть и межатомные расстояния.

Итак, чтобы получить ответ, нам осталось разделить одну уже известную величину на другую. Правильно?

Правильно. Количество атомов резины, которые стираются с шины за один оборот колеса, равно

$$n = \frac{V_0}{V_a} = \frac{40R^2 d h}{L(2r)^3} = \frac{5R^2 d h}{Lr^3}.$$

Теперь мы готовы к вычислениям.

Пусть $R = 1$ фут ≈ 30 см $= 3/10$ м, $d = 4$ дюйма ≈ 10 см $= 1/10$ м, $h = 1/6$ дюйма ≈ 4 мм $= 4/1000$ м, $L = 50000$ миль $= 8 \cdot 10^7$ м, $r = 10^{-10}$ м*). Подставляя эти значения в полученное выражение для n , мы должны помнить, что все члены нужно выразить в одних и тех же единицах, например в метрах. Тогда мы получим

$$n = \frac{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1000 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 10^{-30}}.$$

Хотите, я посчитаю это выражение на моем калькуляторе?

Нет. Обойтись без калькулятора при решении задачи Ферми — это дело чести. Давайте перепишем полученное выражение, собрав вместе все целые числа и все степени 10:

$$n = \left(\frac{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{8} \right) 10^{17}.$$

*Физики обычно считают радиус атома равным именно 10^{-10} м. Полезно запомнить это число. (Между прочим, радиус ядра атома обычно полагают равным 10^{-15} м.) (Прим. ред.)

Легко заметить, что выражение в скобках примерно равно 20. Таким образом, количество атомов резины, стираемых с шины за один оборот колеса, равно $n = 2 \cdot 10^{18}$.

Не следует ли отбросить двойку и округлить это число до 10^{18} ?

Да, конечно. Отсутствие двойки не повлияет на точность нашей оценки.

Итак, если кто-то на вечеринке задаст вам «вопрос о колесе» (а поверьте мне, кто-нибудь да сделает это!), вы можете глубокомысленно посмотреть в потолок и через пару минут произнести: «Примерно... 10^{18} атомов за один оборот». Именно так отвечал на подобные вопросы сам Ферми.

Предлагаю вам поупражняться и решить еще две задачи Ферми:

1. В 1980 году население города Бостона составляло 560 000 человек.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы начинаем третий конкурс по решению задач «Математика 6—8». Результаты предыдущего конкурса будут опубликованы в следующем номере журнала.

Условия конкурса: в нем могут участвовать учащиеся 6—8 классов, которым будут предложены 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала. Победители будут награждены призами и дипломами.

Решения задач этого номера высылайте до 1 декабря 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, 1-я Тверская-Ямская ул., 2/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.

Задачи

1. Если вечером на Поле Чудес закопать золотые монеты, то к утру на их месте вырастут одинаковые деревья с золотыми



монетами на ветвях. Бура-тино пришел на Поле Чудес в понедельник, имея 5 золотых монет. Он хочет получить не меньше 1992 монет. Вырастив первые деревья, он понял, что сможет добиться своего не раньше среды, но не позже пятницы. Сумеет ли он оказаться владельцем ровно 1992 монет?

И. Акулич

2. Целые числа a , b и c таковы, что $ab + bc + ca = 0$. Докажите, что число abc может быть представлено

Сколько школьных учителей было в городе в том году?

2. Сколько галлонов бензина ежедневно сжигают все частные автомашины в США?

Большой или маленький?

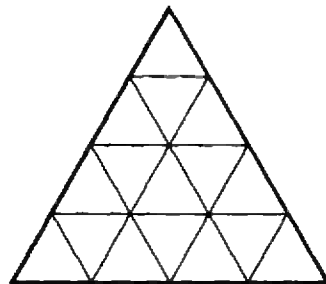
Как вы считаете, 10^{18} атомов, стирающихся с шины при каждом обороте колеса, это много или мало? Ответить на этот вопрос не удастся до тех пор, пока вы не ответите на другой вопрос: «Много или мало по отношению к чему?» Если рассматривать 10^{18} просто как число — это, конечно, много. Например, оно в 10 000 000 раз больше, чем число звезд в Млечном Пути.

Однако у нас речь идет не просто о числе 10^{18} , а о числе атомов. А это примерно в 10 000 000 раз меньше, чем количество атомов в стакане воды.

в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

В. Произволов

3. Правильный треугольник со стороной длины n разбит на единичные правильные треугольники (см. рисунок). Сколько существует различных равносторонних треугольников, вершины которых являются вершинами этих



единичных треугольников? (Заметим, что при $n=1$ это число равно 1, при $n=2$ оно равно 5, а при $n=3$ равно 15.)

Н. Авилов



Школа «Квант»

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Когда вокруг всё вертится...» предназначена девятиклассникам, заметка «Почему висит кольцо» — одиннадцатиклассникам.

Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Когда вокруг всё вертится...

Начав изучать кинематику, вы наверняка заметили, какое большое внимание уделяется понятию «система отсчета» (СО). Действительно, бессмысленно говорить о движении тела или точки, если не указывать, относительно какого другого тела (тела отсчета) производятся измерения координат, скорости и ускорения. Самая привычная СО — земля, однако иногда бывает удобно перейти в СО, связанную

с движущимся воздухом (ветром), водой в реке и т. д. Кроме того, изучая движение самой Земли по орбите или вокруг собственной оси, переходят в СО, связанную с Солнцем и звездами.

Переходя из одной СО в другую, не надо, конечно, пересаживаться из одного движущегося «экипажа» в другой. Зачастую это было бы просто невозможно. «Переход» производят мысленно, вычисляя, какие результаты получил бы движущийся наблюдатель при измерении координат, скорости и ускорения. Например, закон сложения скоростей позволяет связать между собой скорость тела S относительно неподвижной системы отсчета $A(\vec{v}_C)$, его скорость относительно движущейся системы B (так называемая относительная скорость \vec{v}_{CB} и скорость движущейся СО относительно неподвижной (\vec{v}_B):

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_B, \text{ или } \vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B. \quad (1)$$

Однако простое и однозначное применение закона сложения скоростей возможно только тогда, когда одна СО движется относительно другой поступательно. Именно в этом случае все точки СО B имеют относительно A одинаковую скорость \vec{v}_B и можно просто говорить о скорости одной СО относительно другой. А как быть, если одна СО совершает относительно другой не поступательное, а вращательное движение?

Рассмотрим пример. Предположим, что космический корабль S приближается к быстро вращающейся с угловой скоростью ω планете B со скоростью v_C , находясь в ее экваториальной плоскости (рис. 1). Командир корабля дает распоряжение двум стаже-

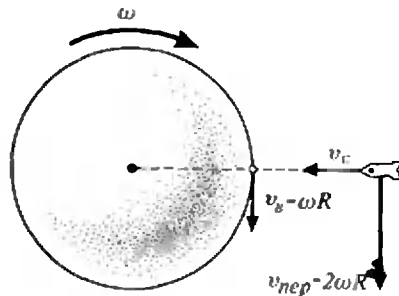


Рис. 1.

рам: найдите скорость \vec{v}_{CB} нашего корабля с точки зрения наблюдателей на планете в тот момент, когда расстояние до поверхности планеты будет равно ее радиусу R .

Первый стажер знал кинематику весьма поверхностно. Он решил применить закон сложения скоростей. Для этого он сначала вычислил скорость наблюдателя на поверхности планеты: $v_B = \omega R$. Потом, считая, что наблюдатель находится в момент наблюдения точно под кораблем, нашел направление и модуль вектора \vec{v}_{CB} :

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B; \quad v_{CB} = \sqrt{v_C^2 + (\omega R)^2}.$$

Второй стажер знал кинематику гораздо лучше (наверное, он выписывал журнал «Квант»). Он рассуждал следующим образом. Посмотрим, какую скорость нужно иметь на высоте R (на расстоянии $2R$ от центра планеты), чтобы казаться неподвижным наблюдателю на планете. Для этого представим, что планета заполняет все пространство. Тогда в данном месте воображаемые точки планеты имеют скорость $v_{пер} = \omega \cdot 2R$ — ее называют переносной скоростью, — а скорость корабля относительно вращающейся СО равна

$$\vec{v}_{отн} = \vec{v}_C - \vec{v}_{пер}; \quad v_{отн} = \sqrt{v_C^2 + (2\omega R)^2}.$$

Именно этот стажер стал вскоре постоянным членом экипажа.

(Хотя этот пример немного шуточный, аналогичные проблемы действительно возникают при наблюдении за удаленными спутниками и ракетами с вращающейся Земли.)

Итак, общее правило состоит в том, что закон сложения скоростей можно применять и в случае вращающихся СО, но нужно брать скорость не самой СО (это понятие не имеет смысла — разные точки СО движутся по-разному), а переносную скорость — скорость той точки вращающейся СО, где в данный момент находится тело:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \text{ или } \vec{v}_{отн} = \vec{v}_C - \vec{v}_{пер}. \quad (2)$$

Это правило выглядит вполне очевидным, если вы находитесь непосредственно на вращающемся теле. Тогда переносная скорость — это скорость тела у вас под ногами (если вы остановитесь, вращающееся тело будет «переносить» вас в пространстве именно с этой скоростью). Например, если вы идете по вращающейся с угловой скоростью ω платформе вдоль ее радиуса (рис. 2) со скоростью $v_{отн}$, а платформа у вас под ногами имеет скорость $v_{пер} = \omega R$, где R — изменяющееся расстояние от центра платформы, то ваша полная скорость относительно земли будет равна

$$v = \sqrt{v_{отн}^2 + (\omega R)^2}.$$

Психологическая трудность, с которой столкнулся незадачливый стажер, состояла в том, что корабль находился вне вращающегося тела (планеты) и у него не хватило воображения мысленно распространить планету на окружающее пространство и правильно вычислить переносную скорость.

Чтобы проверить, все ли вы поняли, решите такую задачу.

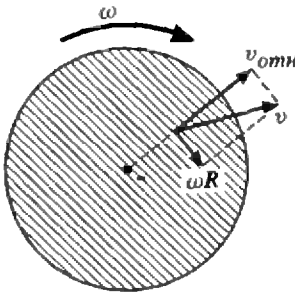


Рис. 2.

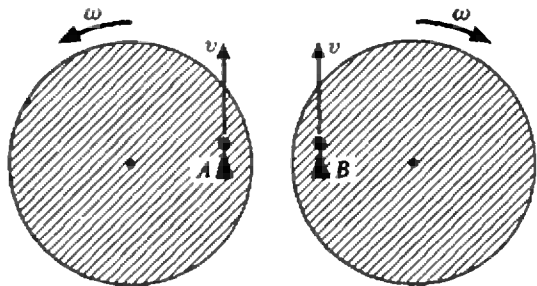


Рис. 3.

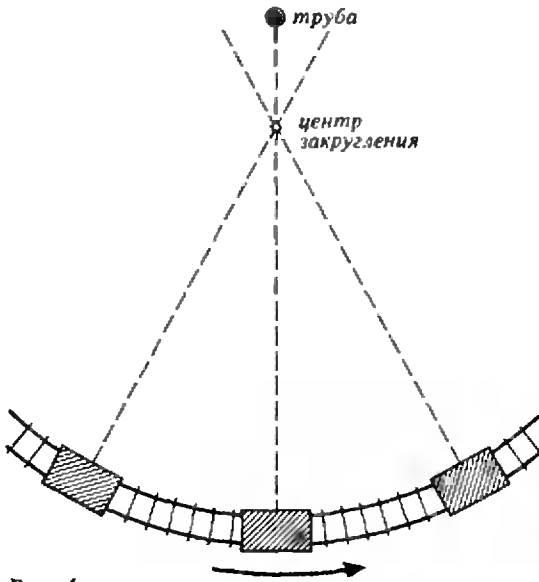


Рис. 4.

Две одинаковые круглые платформы, на которых сидят наблюдатели A и B , вращаются навстречу друг другу с одной и той же угловой скоростью 1 рад/с (рис. 3). Радиусы платформ 2 м , расстояние между их центрами 5 м . Чему равна скорость человека A относительно наблюдателя B в момент, указанный на рисунке 3?

Не торопитесь. Ответ — в конце статьи.

Теперь еще один (менее глобальный) пример, в котором незнание того, что выбранная СО поворачивается, может привести к неожиданному эффекту. Предположим, что, сидя у окна в купе скорого поезда, вы рассеянно любуетесь пейзажем. Бегут назад деревья, дома... И вдруг вы замечаете, что расположенная вдалеке фабричная труба движется не назад, а вперед, обгоняя поезд! В чем тут дело? Объяснение очень простое — вы не заметили, что поезд начал поворачивать по дуге большого радиуса, и теперь вы находитесь во вращающейся СО, хотя сами об этом не знаете. Посмотрите на рисунок 4. Если бы труба находилась в центре закругления, она казалась бы вам неподвижной, потому что переносная скорость в этой точке равна нулю и скорость трубы относительно земли тоже равна нулю. А если труба ока-

жется дальше, чем центр окружности, то переносная скорость в этом месте будет направлена назад, а относительная — вперед, и будет казаться, что труба обгоняет поезд.

Возможно, у вас возник вопрос — а имеем ли мы право переходить во вращающиеся СО? Может быть, это незаконно, и мы можем пользоваться только такими СО, которые движутся равномерно и поступательно? Ведь нелепо утверждать, что между ними нет разницы. Попробуй усидеть на быстро вращающейся карусели — тебя так и норовит выкинуть наружу. А вот в быстро летящем самолете чувствуешь себя вполне комфортно (кроме взлета и посадки).

В некотором смысле вы правы. С точки зрения динамики, есть выделенные СО — так называемые инерциальные, в которых действуют законы Ньютона, а все СО, движущиеся относительно них с ускорением (в том числе и вращающиеся), являются неинерциальными. Например, СО, связанную с Солнцем и звездами, можно считать инерциальной, а СО, связанную с Землей или с ускоряющейся ракетой, — нет. Однако эта разница важна только с точки зрения динамики. В рамках кинематики, если не думать о том, почему тела так движутся, а заниматься только описанием их движения, все СО являются законными и равноправными.

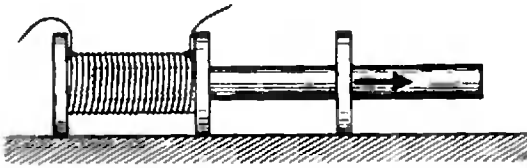
А теперь — обещанный ответ к задаче: относительная скорость равна 1 м/с .

А. Черноуцан

Почему висит кольцо

Поговорим о двух опытах, которые вы можете провести в школьном физическом кабинете.

Первый опыт. Возьмите длинный железный стержень круглого сечения и вставьте его одним концом в катушку, длина которой в несколько раз меньше длины стержня. Расположите сердечник с катушкой горизонтально



(см. рисунок). На выступающий конец сердечника наденьте легкое алюминиевое кольцо, диаметр которого чуть больше диаметра сердечника. К катушке через ключ подсоедините источник постоянного тока, напряжение на выходе которого можно при желании изменять.

Придвиньте алюминиевое кольцо вплотную к катушке и замкните ключ — кольцо оттолкнется от катушки. Величину постоянного тока можно подобрать так, чтобы кольцо удалилось почти на всю длину сердечника. Теперь разомкните цепь — кольцо возвратится почти в исходное положение.

Объяснение этого опыта кажется не очень сложным. Приведем его. Площадь, ограниченную алюминиевым кольцом, пронизывает магнитный поток, создаваемый током в катушке. При замыкании ключа этот магнитный поток растет, и по правилу Ленца в кольце возникает индукционный ток, направленный противоположно току в катушке. Антипараллельные токи отталкиваются, следовательно, кольцо действительно должно отталкиваться от катушки. При размыкании цепи магнитный поток уменьшается, и в кольце возникает ток, сонаправленный току в катушке. Такие токи притягиваются друг к другу, вот почему кольцо приближается к катушке.

Второй опыт. Расположите сердечник вертикально так, чтобы катушка находилась в нижней его части, и наденьте на него алюминиевое кольцо. Подключите к катушке источник переменного синусоидального тока (можно просто включить катушку в сеть, а для регулирования величины напряжения последовательно катушке подсоединить реостат) и замкните цепь. Кольцо, лежащее на катушке, приподни-

мается и висит в воздухе все время, пока по катушке идет ток. Если амплитуда тока достаточно большая, то в момент включения кольцо может даже слететь с сердечника.

Как же можно объяснить этот опыт? Попробуем сначала провести такие же рассуждения, как и в первом случае.

В течение той четверти периода, когда величина тока в катушке растет, в кольце возникает индукционный ток, направленный противоположно току в катушке, и между кольцом и катушкой возникают силы отталкивания. В течение следующей четверти периода, когда величина тока в катушке уменьшается, между кольцом и катушкой действуют силы притяжения. Таким образом, на кольцо должна действовать быстро меняющаяся по направлению сила. Среднее значение этой силы равно нулю, поэтому кольцо, казалось бы, не должно приподниматься и тем более висеть в воздухе.

В чем же дело? Причина возникшего противоречия между приведенным объяснением и реальным поведением кольца заключена в следующем. Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную кольцом, создается не только током, идущим по катушке, но и индукционным током, возникающим в самом кольце (явление самоиндукции). И если при объяснении первого опыта пренебрежение этим фактором не привело к ошибочным выводам, то во втором случае мы пришли к противоречию. Попробуем разобраться, но прежде сформулируем три утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1) Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную кольцом, можно представить как сумму двух потоков:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

где Φ_1 — магнитный поток, создаваемый током I_1 , текущим по катушке, а Φ_2 — поток, создаваемый индукционным током I_2 , возникающим в кольце.

2) Если Φ_1 и Φ_2 имеют одинаковые знаки, то это означает, что соответст-

вующие им магнитные поля, а значит, и создающие эти поля токи должны быть параллельными. Совершенно аналогично, если Φ_1 и Φ_2 имеют противоположные знаки, то это означает, что токи антипараллельны.

3) Наблюдаемые в обоих опытах эффекты имеют место только в том случае, если сопротивление алюминиевого кольца достаточно мало (по этой причине не следует изготавливать кольцо из тонкой проволоки). И вот почему. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая в кольце, определяется скоростью изменения магнитного потока со временем: $\mathcal{E}_n = -\dot{\Phi}$. С другой стороны, в соответствии с законом Ома, $\mathcal{E}_n = I_2 R$, где R — сопротивление кольца. Если R достаточно мало*), то $\mathcal{E}_n \approx 0$, и следовательно, $\Phi \approx \text{const}$, т. е. при быстрых изменениях тока в катушке магнитный поток остается практически постоянным.

Теперь мы можем дать объяснение второму опыту. Перед включением переменного тока магнитный поток Φ был равен нулю. Согласно третьему утверждению, он будет равен нулю и после включения тока. Отсюда следует, что все время, пока по катушке идет переменный ток, Φ_1 и Φ_2 равны по величине, но противоположны по знаку. Тогда из второго утверждения получаем, что токи в этом случае антипараллельны, а значит, на кольцо в течение всего опыта действует сила отталкивания. Если амплитуда тока достаточно велика, возникающая сила отталкивания будет больше силы тяжести кольца. Однако при удалении от катушки сила отталкивания становится меньше, и на некоторой высоте она оказывается равной силе тяжести — это и есть положение равновесия кольца. Если кольцо успело развить достаточно большую скорость, оно может проскочить положение равновесия и слететь с сердечника.

Вернемся к первому опыту и объясним его с тех же позиций, что и второй. Поведение кольца при включении постоянного тока ничем не отличается от его поведения при протекании переменного тока. Поэтому рассмотрим подробно только процесс выключения тока. За время между включением тока и его выключением индукционный ток, текущий в кольце, успевает обратиться в нуль (за счет джоулевых потерь). Поэтому перед выключением тока $\Phi = \Phi_1$. При выключении тока в катушке вместе с током I_1 начинает быстро уменьшаться и поток Φ_1 . Одновременно в кольце возникает индукционный ток I_2 , а с ним и магнитный поток Φ_2 . Так как суммарный поток остается постоянным, знаки у Φ_1 и Φ_2 одинаковы. Это значит, что токи I_1 и I_2 — параллельны, следовательно, кольцо притягивается к катушке.

В заключение обсудим, что изменилось бы, если бы мы заменили алюминиевое кольцо на кольцо из сверхпроводника, сопротивление которого, как известно, не просто мало, а равно нулю. При включении тока это кольцо будет отталкиваться так же, как и алюминиевое. Однако теперь все время между включением тока и его выключением индукционный ток в кольце остается постоянным ($R = 0$, и джоулевы потери отсутствуют). Т. е. все время, пока по катушке идет ток, между катушкой и кольцом действуют силы отталкивания. Суммарный магнитный поток при этом остается равным нулю. При отключении источника тока I_1 и I_2 начинают убывать, оставаясь антипараллельными. Поэтому между кольцом и катушкой продолжают действовать силы отталкивания, правда, убывающие со временем.

Б. Рыбин

*) Время затухания тока в кольце $\tau \sim L/R$ (L — индуктивность кольца) должно быть гораздо больше периода изменения внешнего магнитного поля T . Поскольку $T = 2\pi/\omega$, условие малости R принимает вид $R \ll \omega L$.

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Два катера встретились у моста и разошлись. Повернув через $t=0,5$ ч в обратную сторону, они вновь встретились на расстоянии $l=2$ км от моста. Определите скорость течения реки, если известно, что после поворота скорости катера относительно воды не изменились.

2. График зависимости ускорения движения тела от времени приведен на рисунке 1. Начертите графики зависимости скорости, перемещения и пройденного пути от времени. Начальная скорость тела равна нулю.

3. За последнюю секунду свободного падения тело пролетело $3/4$ всего пути. Сколько времени оно падало?

4. Два шарика брошены вертикально вверх из одной точки один вслед за другим через интервал времени t с одинаковыми начальными скоростями v_0 . Найдите модуль и направление скорости второго шарика относительно первого. Через какое время шарики встретятся?

5. Лифт движется с ускорением a . Пассажир, находящийся в лифте, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно пола лифта, если лифт движется вверх? вниз?

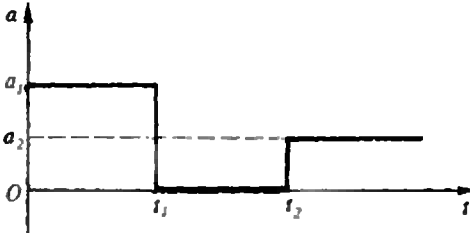


Рис. 1.

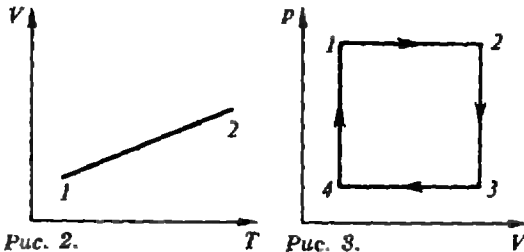


Рис. 2.

Рис. 3.

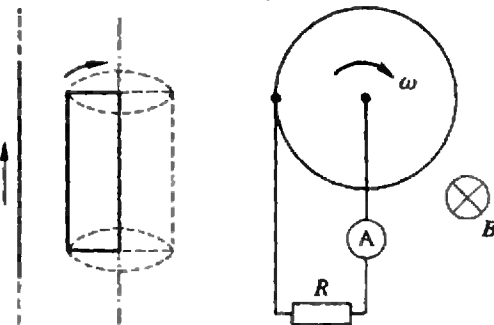


Рис. 4.

Рис. 5.

10 класс

6. На пути молекулярного пучка находится «зеркальная» стенка. Найдите давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке $v=10^3$ м/с, концентрация $n=5 \times 10^{17}$ м⁻³, масса $m=3,8 \cdot 10^{-27}$ кг, а стенка движется навстречу пучку со скоростью $u=50$ м/с.

7. В баллоне находилось $m=0,3$ кг гелия. Через некоторое время в результате утечки гелия и уменьшения абсолютной температуры на 10% давление в баллоне уменьшилось на 20%. Сколько молекул гелия просочилось из баллона?

8. Некоторое количество водорода находилось в закрытом сосуде при температуре $T_1=200$ К и давлении $p_1=400$ Па. Газ нагрели до температуры T_2 , при которой молекулы водорода практически полностью распались на атомы, а давление газа стало $p_2=40$ кПа. Во сколько раз при этом возросла средняя квадратичная скорость частиц газа?

9. Поршень в цилиндре с воздухом прилегает к стенкам цилиндра неплотно и поэтому медленно пропускает воздух. Снятая во время нагревания при постоянном давлении зависимость объема от температуры изображена на рисунке 2. Увеличивалась или уменьшалась масса воздуха в цилиндре?

10. На рисунке 3 показан циклический процесс, проведенный над некоторой массой газа. Изобразите этот процесс в координатах p, T и V, T .

11 класс

11. Два параллельных прямолинейных проводника, по одному из которых течет ток I_1 , сближаются. Определите направление индукционного тока I_2 , возникающего в другом проводнике. Каково будет направление индукционного тока при удалении проводника друг от друга?

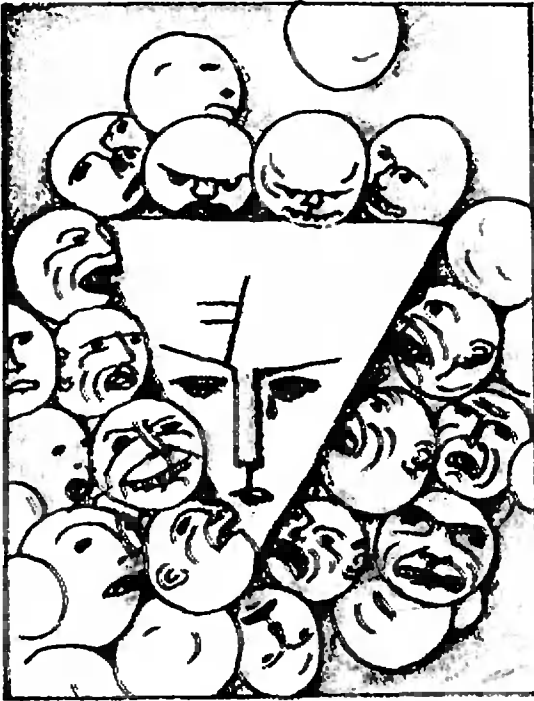
12. Проволочный виток площадью S и сопротивлением R находится во внешнем однородном магнитном поле. Индукция поля изменяется по закону $B=B_0 \sin \omega t$ (B_0 и ω — известны). Определите максимальное значение тока и тепловую мощность, выделяемую в витке. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости витка.

13. Проводник длиной $l=1$ м движется со скоростью $v=5$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину магнитной индукции, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0,02$ В.

14. Проволочная прямоугольная рамка вращается с постоянной скоростью вокруг одной из своих сторон, параллельных прямолинейному проводу с током (рис. 4). При каких положениях рамки в ней возникает наибольшая и наименьшая ЭДС индукции?

15. Проводящий диск вращается с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле, индукция которого \vec{B} перпендикулярна плоскости диска (рис. 5). Что показывает амперметр, включенный через резистор сопротивлением R ? Радиус диска $r=0,5$ м, $R=1$ Ом, $\omega=2\pi \cdot 50$ с⁻¹, $B=1$ Тл.

Публикацию подготовила В. Тихомирова



Математический кружок

Вокруг теоремы Фейербаха

В. ПРОТАСОВ

В первой половине прошлого века немецкий математик К. Фейербах доказал одну из самых красивых теорем планиметрии. Об этой теореме и других связанных с ней вещах и пойдет речь в этой статье.

Окружность девяти точек

Пусть дан треугольник ABC , A' , B' , C' — середины его сторон. Треугольник $A'B'C'$ мы будем называть *среди́нным* треугольником треугольника ABC . Опишем около треугольника $A'B'C'$ окружность γ — *окружность Эйлера* треугольника ABC . (Дальше мы будем говорить «окружность XYZ », имея в виду окружность, проходящую через три

данные точки X, Y, Z .) Начнем с совсем простых утверждений (необходимые обозначения см. на рис. 1).

Упражнение 1. Докажите, что

а) Центр описанной около треугольника окружности совпадает с точкой пересечения высот его срадиного треугольника.

б) Радиус окружности γ равен половине радиуса окружности ABC .

в) Центроиды (точки пересечения медиан) треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а треугольники ABC и $A'B'C'$ гомотетичны с коэффициентом -2 относительно их общего центроида M .

г)* (теорема Эйлера) Для всякого треугольника ABC его ортоцентр H , центр O окружности ABC и центроид M лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $2OM = MH$.

д) Центр окружности Эйлера треугольника ABC совпадает с серединой отрезка OH .

Указание. Перпендикуляр к отрезку $A'C'$ в точке B'' пересекает прямую OH в точке O' , для которой $OM/MO' = B'M/MB'' = 2/1$ ($B'M = 1/2 B''M$).

Аналогично, и остальные срединные перпендикуляры треугольника $A'B'C'$ также проходят через точку O' .

Почему же окружность Эйлера называется еще и окружностью девяти точек? Объяснение дает следующая теорема, известная еще Эйлеру.

Теорема 1. Пусть γ — окружность Эйлера треугольника ABC . Тогда кроме средин сторон ей принадлежат следующие 6 точек: основания высот этого треугольника и середины отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром.

Вы получите доказательство этой теоремы, решив следующее упражнение.

Упражнение 2. Докажите, что (рис. 2) если B — основание высоты, опущенной из вершины B , а прямая $B'O'$ пересекает BB' в точке K , то $BK = KH = B'O$, $B'O' = O'K$ (воспользуйтесь упражнениями 1, в), г)).

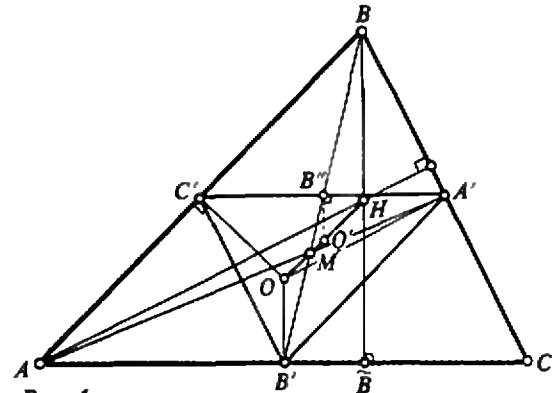


Рис. 1.

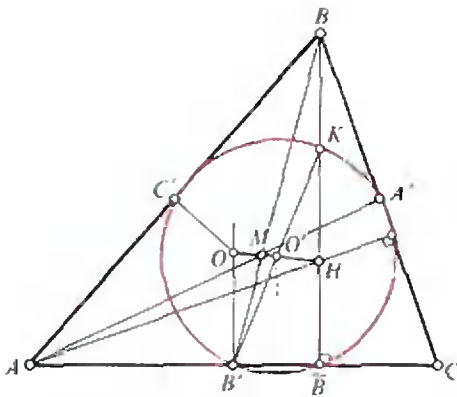


Рис. 2.

Из результата упражнения 2 следует, что $B'K$ — диаметр окружности Эйлера, т. е. что точки B' и K ей принадлежат, а это и доказывает теорему.

Свойства окружности девяти точек, составляющие содержание упражнений 1 и 2, нам в дальнейшем не понадобятся. Но мы все-таки советуем вам решить эти упражнения, чтобы поближе познакомиться с объектом, более глубокие свойства которого нам предстоит обнаружить.

Формулировка теоремы Фейербаха

Напомним, что внеписанной окружностью треугольника ABC , соответствующей стороне AB (или — вершине C), называется окружность, касающаяся стороны AB и продолжений сторон AC и BC . Легко видеть, что у любого треугольника существует ровно три внеписанных окружности. При этом центр внеписанной окружности треугольника ABC , соответствующей вершине C , — это точка пересечения биссектрисы угла C и внешних углов A и B треугольника ABC (докажите это самостоятельно).

Таким образом, если три прямые образуют треугольник, то существуют ровно четыре окружности, каждая из которых касается всех трех прямых (рис. 3).

Теперь мы можем сформулировать теорему, составляющую основное содержание этой статьи.

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается вписан-*

ной и всех внеписанных окружностей данного треугольника.

Дальше мы увидим, что на самом деле окружность Эйлера касается не только вписанной и внеписанных окружностей, а еще целых 60-ти (!) окружностей, связанных с данным треугольником. Но для этого нам предстоит провести некую предварительную подготовку.

Ориентированные углы и теорема о сегменте

Для облегчения в дальнейшем формулировок договоримся о некоторых терминах.

Определение 1. Углом между пересекающимися в точке O различными прямыми a и b мы будем называть угол, на который необходимо повернуть прямую a вокруг точки O против часовой стрелки до совпадения с прямой b (в литературе подобному определению часто соответствует термин «ориентированный угол»).

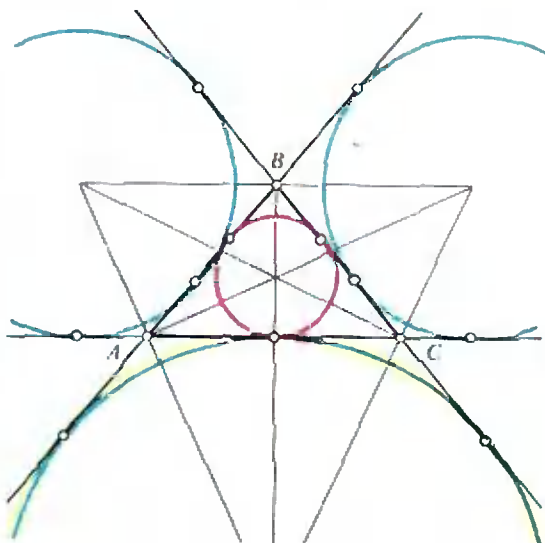


Рис. 3.

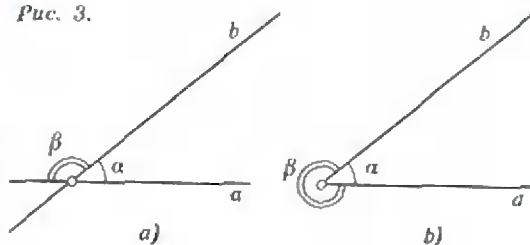


Рис. 4.

На рисунке 4, α — угол между a и b , β — угол между b и a (очевидно, $\alpha + \beta = \pi$). Такое понимание угла позволит нам понимать без специальных оговорок, какой из двух смежных углов рассматривается в каждом конкретном случае. Аналогично определяется угол между лучами a и b , выходящими из одной точки. На рисунке 4, β — угол между лучами a и b , α — между b и a (здесь $\alpha + \beta = 2\pi$).

Определение 2. Дугой $\overset{\frown}{AB}$ данной окружности мы будем называть дугу, пробегаемую точкой при движении по этой окружности против часовой стрелки от A к B . При таком определении ясно, какую из двух дуг, на которые точки A и B разбивают окружность, надо считать дугой $\overset{\frown}{AB}$. Ясно, что дуги $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BA}$ составляют всю окружность.

Наконец, напомним, что угловой мерой дуги $\overset{\frown}{BA}$ данной окружности называется угол между лучами OA и OB , где O — центр окружности, а

угловой мерой дуги $\overset{\frown}{BA}$ — угол между лучами OB и OA . Таким образом, $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA} = 2\pi$.

Сформулируем теперь очень важное для дальнейшего и интересное само по себе утверждение.

Теорема 2 (теорема о сегменте). В угол, образованный прямыми a и b (см. рис. 5—8) вписана окружность ω с центром I . На прямых a и b выбираются произвольные точки A и B так, что (см. рис. 5—7) прямая AB касается окружности ω , а через точки A и B проводится окружность ω_1 , для которой $\overset{\frown}{AB} = \varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$ — данное фиксированное число. Тогда существуют две постоянные окружности, касающиеся прямых AO и OB и окружности ω_1 .

Одна из этих окружностей касается этих прямых в точках N_a и N_b , вторая — в точках M_a и M_b таких, что $\angle AN_aI = \varphi/4$, а $\angle IM_aO = (2\pi - \varphi)/4$ (таким образом, треугольник N_aIM_a — прямоугольный).

Конечно, сразу разобраться в столь

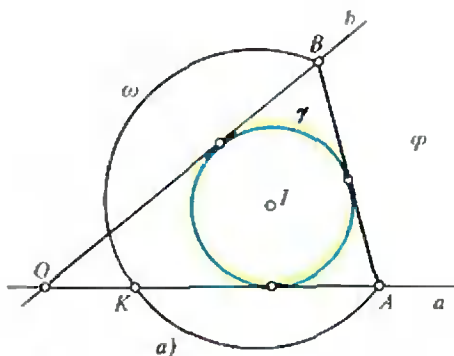


Рис. 5.

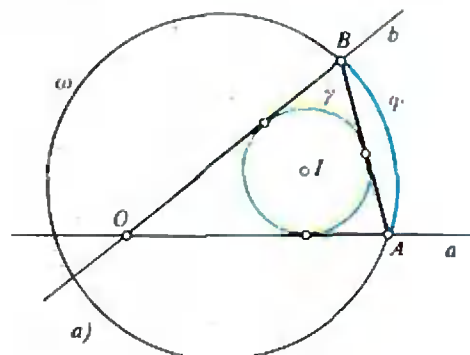
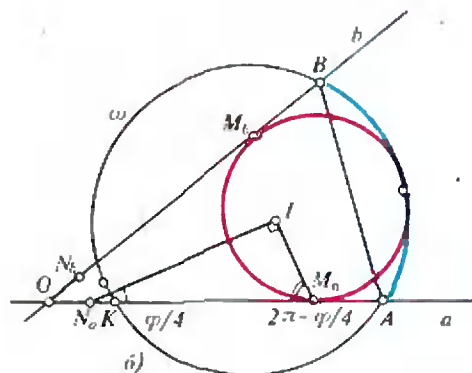
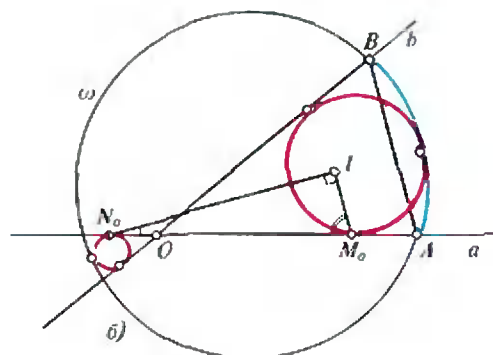


Рис. 6.



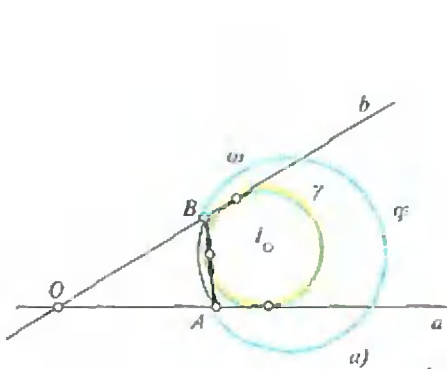


Рис. 7.

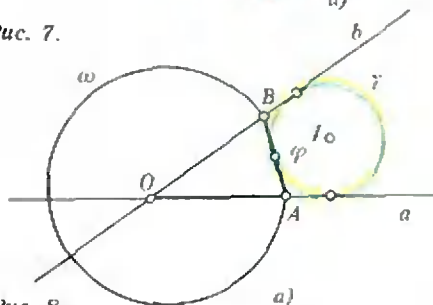
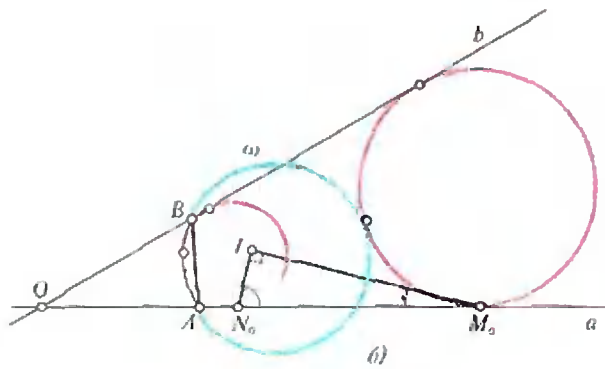
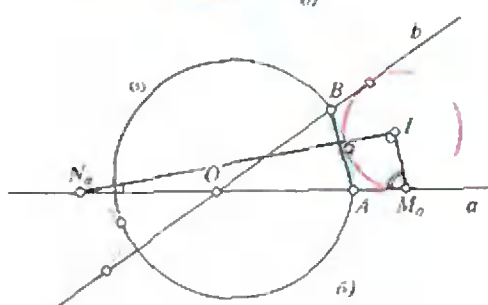


Рис. 8.



длинной формулировке не просто. Для наглядности представим себе, что точки A и B движутся по лучам OA и OB так, что окружность γ все время остается вписанной в треугольник AOB (см. рис. 5, а)). На стороне AB во внешнюю сторону треугольника AOB строится дуга окружности, равная φ (эта дуга вместе с отрезком AB ограничивает синий сегмент (см. рис. 9)). Тогда переменная окружность ω , содержащая дугу φ , будет касаться двух фиксированных окружностей, показанных на рисунках 5—9 красным цветом.

Рисунок 9 — это один из случаев реализации теоремы о сегменте. Другая возможность представлена на рисунках 6, а), б). Здесь угол φ мал (точнее $\frac{\varphi}{2} < \angle AOB$), и точка N_0 «ушла» на продолжение луча AO за точку O (почему?), так что красная окружность, касающаяся прямой a в точке N_0 , вписана уже не в угол AOB , а в вертикальный с ним.

Наконец, окружность γ может быть не только вписанной, но и невписанной для треугольника AOB . Эта ситуация порождает еще два случая (рис. 7 и 8).

Определения угла и дуги, данные выше, позволили свести все случаи

в единую формулировку теоремы о сегменте. Приняв пока теорему о сегменте как факт, без доказательства, получим некоторые ее следствия.

Упражнения.

3. Докажите, что прямая BK параллельна касательной к окружности γ , проведенной из точки N_0 (рис. 5, б).

4. а) По сторонам угла движутся точки A и B , так что треугольник AOB имеет постоянную вписанную окружность γ . Докажите, что его описанная окружность все время касается фиксированной окружности, вписанной в угол AOB , причем точки касания последней со сторонами угла и центр окружности γ лежат на одной прямой.

б) Докажите утверждение а), если γ — постоянная невписанная окружность треугольника AOB , соответствующая вершине O .

5. а) Докажите, что окружность, вписанная в прямой угол C треугольника ABC и касающаяся изнутри его описанной окружности, гомотетична вписанной окружности треугольника ABC относительно точки C с коэффициентом 2:1.

б) Докажите, что окружность, вписанная в прямой угол C треугольника ABC и касающаяся внешним образом его описанной окружности, гомотетична относительно точки C с коэффициентом 2:1 его невписанной окружности.

в) Докажите теорему Фейербаха для прямоугольного треугольника.

6. Даны непересекающиеся окружности γ_1 и γ_2 . Произвольная окружность касается γ_1 и γ_2 внутренним образом и пересекает их общие внутренние касательные в точках A, B, C, D (рис. 10). Докажите, что

а) Угловые меры дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$ постоянны и равны удвоенным углам, образованным прямыми AC и BD с общей внешней касательной к γ_1 и γ_2 .

б) У треугольников AOB и COD постоянные вписанные окружности.

7. Предыдущее упражнение есть не что иное, как утверждение, обратное случаю теоремы о сегменте, показанному на рисунке 6. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения, соответствующие случаям, показанным на рисунках 7 и 8.

8. Даны окружности γ_1 и γ_2 , касающиеся внешним образом в точке O . Окружность ω касается их одинаковым образом (внутренним или внешним). Докажите, что общая касательная к γ_1 и γ_2 , проведенная в точке O , делит окружность ω на две дуги, равные удвоенным углам между этой касательной и другой общей касательной к γ_1 и γ_2 .

9 (задача о луночке). Дан угол с вершиной в точке O и два числа φ_1 и φ_2 такие, что $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $0 < \varphi_2 < 2\pi$. Точки A и B движутся по сторонам угла, и на стороне AB во внешнюю сторону треугольника AOB строятся две дуги, равные φ_1 и φ_2 («луночка»). Докажите, что если окружность, содержащая первую дугу, касается фиксированной окружности, вписанной в угол O , то и окружность, содержащая вторую дугу, касается фиксированной окружности, вписанной в этот угол.

Утверждение это можно усилить: окружность, содержащая дугу φ_2 , касается двух окружностей, правда, вторая может быть вписана уже не в данный угол, а в вертикальный с ним.

Упражнение 9 — в некотором смысле, сильное обобщение теоремы о сегменте. Последняя является частным (вернее, предельным) случаем, когда $\varphi_1 = 0$, и, следовательно, одна из дуг луночки вырождается в прямую, а луночка — в сегмент. Тем не менее, решение задачи о луночке следует из этого своего частного случая.

Доказательство теоремы о сегменте

Докажем, что (в обозначениях рисунка 5, б) окружность, касающаяся прямых a и b в точках N_a и N_b соответственно, касается окружности ω . Доказательство для второй окружности, а также для остальных случаев теоремы совершенно аналогичны. Следующее утверждение является небольшим усилением известной теоремы об угле между касательной и хордой.

Лемма 1. На окружности даны точки A и B . Прямая a касается этой окружности в точке A . Тогда угол

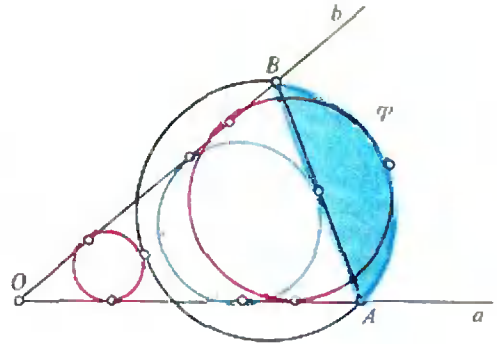


Рис. 9.

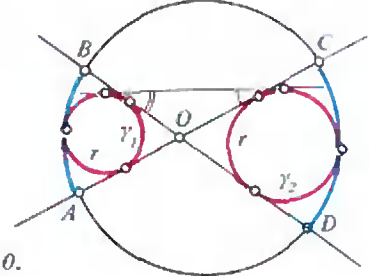


Рис. 10.

между прямыми a и AB равен половине дуги $\overset{\frown}{AB}$. Обратное: если угол между прямыми a и AB равен $\overset{\frown}{AB}/2$, то прямая a касается этой окружности в точке A .

Упражнение 10. Докажите лемму 1.

Лемма 2. Если M — точка внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ такая, что $\angle CMB = \angle MAB + \angle MDC$ (рис. 11), то окружности AMB и CMD касаются в точке M .

Доказательство. Возьмем внутри угла CMB точку K такую, что $\angle KMB = \angle MAB$ и $\angle KMC = \angle MDC$ (по условию леммы, это можно сделать). Так как $\angle KMC = \angle MDC = \overset{\frown}{CM}/2$, то по лемме 1, окружность CMD касается прямой MK в точке M . Точно так же $\angle KMB = \angle MAB = \overset{\frown}{AM}/2$, и окружность AMB касается прямой MK в точке M .

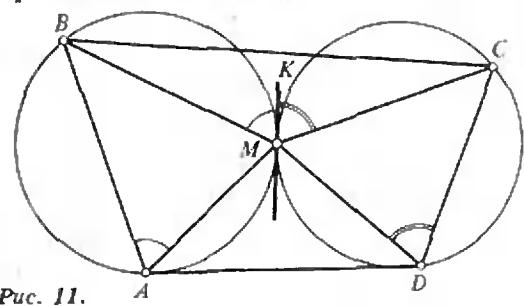


Рис. 11.

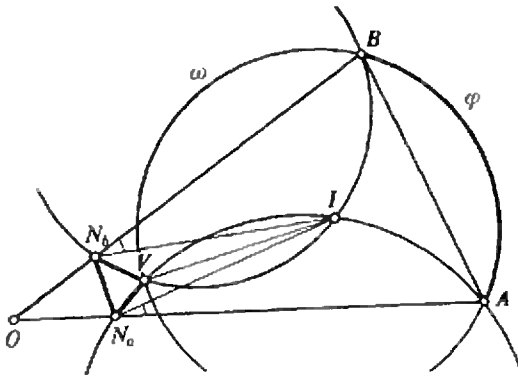


Рис. 12.

Таким образом, окружности CMD и BMA касаются, так как KM — их общая касательная в точке M .

Доказательству теоремы о сегменте предпослшем некоторые наблюдения. Отложим на сторонах треугольника AOB точки N_a и N_b такие, что $ON_a = ON_b$. Пусть I — центр окружности γ , причем $\angle AN_aI = \angle IN_bB = \alpha < \pi/2$. Пусть V — вторая точка пересечения окружностей AIV и BN_bI (рис. 12). Поскольку $\angle IN_bB = \angle IVB$ (как углы, вписанные в окружность BN_bI) и, аналогично, $\angle AN_aI = \angle AVI$, получаем, что $\angle AVB = 2\alpha$. Если теперь провести окружность ABV , окажется, что $\overset{\frown}{AB} = 4\alpha$, т. е. величина дуги AB не зависит от выбора точек A и B .

Нам осталось положить $\varphi = 4\alpha$ и доказать такое утверждение: *если $\angle AN_aI = \angle IN_bB = \varphi/4$, то окружность, касающаяся AO и OB в точках N_a и N_b , касается окружности ω в точке V .*

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2. Из ранее сказанного следует, что точка V лежит на окружности ω . Осталось доказать, что окружность N_aVN_b касается прямых a и b и окружности ω .

Все дальнейшее основано на подсчете углов, чем мы сейчас и займемся.

Прежде всего, $\angle ON_bN_a = \angle ON_aN_b = (\pi - \angle AOB)/2$. С другой стороны, $\angle N_bVN_a = 2\pi - \angle IVN_b - \angle IVN_a = \angle IAN_a + \angle N_bBI = (\angle OBA + \angle OAB)/2 = (\pi - \angle AOB)/2$.

Итак, $\angle ON_bN_a = \angle N_bVN_a = \angle N_bN_aO$, и, по лемме 1, окружность N_aVN_b касается прямых OA и OB в точках N_a и N_b соответственно.

Для доказательства касания окружностей N_aVN_b и ω достаточно убедиться в том (лемма 2), что

$$\angle VN_aN_b + \angle BAV = \angle BVN_b. \quad (1)$$

Прежде всего заметим, что

$$\angle NAV = \angle BAI + \angle IAV,$$

но

$$\begin{aligned} \angle IAV &= \angle IN_aV = \angle AN_aV - \\ &\quad - \angle AN_aI = \angle AN_aV - \varphi/4. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \angle BAV &= \angle AN_aV - \varphi/4 + \\ &\quad + \angle BAO/2. \end{aligned} \quad (2)$$

По лемме 1,

$$\angle VN_aN_b = \angle VN_bB. \quad (3)$$

Поэтому левая часть равенства (1) с учетом (2) и (3) оказывается равной

$$\begin{aligned} \angle VN_bB + \angle AN_aV - \varphi/4 + \angle BAO/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \angle BVN_b &= \angle BIN_b = \pi - \angle IN_bB - \\ &\quad - \angle N_bBI = \pi - \varphi/4 - \angle OBA/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Четырехугольники N_aVIA и N_bVIB — вписанные (каждый — в свою окружность), следовательно,

$$\begin{aligned} \angle AN_aV &= \pi - \angle VIA, \\ \angle VN_bB &= \pi - \angle BIV, \end{aligned}$$

но тогда

$$\begin{aligned} \angle AN_aV + \angle VN_bB &= 2\pi - \angle VIA - \\ &\quad - \angle BIV = \angle AIB, \end{aligned}$$

откуда следует, что выражение (4) равно $\angle AIB - \varphi/4 + \angle BAO/2 = \pi - \varphi/4 - \angle OBA/2$, т. е. совпадает с правой частью равенства (5), что и требовалось.

Теорема о сегменте доказана.

Упражнение 11. Проведите самостоятельно все рассуждения для остальных случаев.

В следующих упражнениях речь идет о произвольном криволинейном треугольнике ABC , состоящем из отрезков CA и CB и дуги AB некоторой окружности.

Упражнения

12. Впишите с помощью циркуля и линейки окружность в данный криволинейный

треугольник ABC . Всегда ли это возможно?

13. Вписанная окружность криволинейного треугольника ABC касается его дуги \widehat{AB} в точке V . Докажите, что биссектриса угла AVB проходит через центр окружности, вписанной в (обычный) треугольник ABC .

14. Вписанная в криволинейный треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке M и дуги AB в точке V . Докажите, что окружность MVA проходит через центр вписанной окружности (обычного) треугольника ABC .

15. Дан треугольник ABC (обычный). Окружность, вписанная в угол C , касается изнутри окружности ABC в точке M , T — середина дуги AB , содержащей точку C , I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что точки I , T , M лежат на одной прямой.

Доказательство теоремы Фейербаха

Мы увидим, что теорема Фейербаха является частным случаем доказанной нами теоремы, точнее — тем ее случаем, когда (см. формулировку теоремы о сегменте) угол между прямыми a и b равен $(2\pi - \varphi)/2$.

Пусть $A'B'C'$ — срединный треугольник данного треугольника ABC (рис. 13), N и N' — точки касания прямой BC со вписанными окружностями треугольников ABC и $A'B'C'$, соответственно, I' — центр вписанной в треугольник $A'B'C'$ окружности.

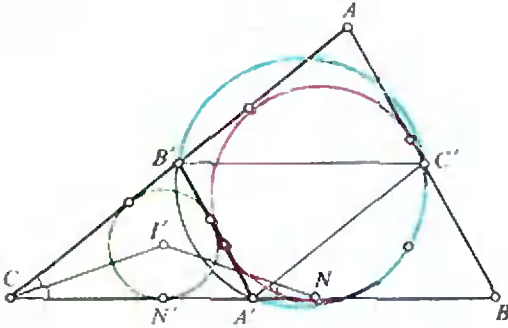


Рис. 13.

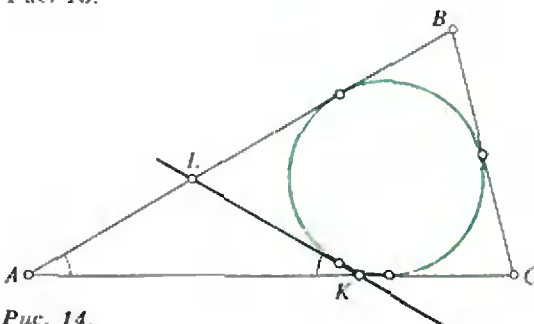


Рис. 14.

Докажем, что вписанная окружность треугольника ABC касается окружности $A'B'C'$ (т. е. окружности девяти точек).

Треугольники CAB и $CA'B'$, а значит, и вписанные в них круги, гомотетичны относительно точки C с коэффициентом $2:1$. Следовательно, $CN = 2CN'$, а значит, $CN' = N'N$, и треугольник CIN' равнобедренный.

Применим теорему о сегменте, положив $\varphi = 2(\pi - \angle ACB)$.

Имеем $\widehat{A'B'} = 2\pi - \widehat{B'A'} = 2\pi - 2\angle A'C'B' = 2\pi - 2\angle ACB$ ($\angle A'C'B' = \angle ACB$, так как $CB'C'A'$ — параллелограмм). Итак, $\widehat{A'B'} = \varphi$. Кроме того, $\angle I'NC = (2\pi - \varphi)/4$ (так как треугольник $I'CN$ — равнобедренный, то $\angle I'NC = \angle ICN = \angle ABC/2 = (2\pi - \varphi)/4$, в силу выбора числа φ).

По теореме о сегменте, окружность ω , проходящая через A' и B' , для которой $\widehat{A'B'} = \varphi$ (а это — окружность девяти точек), должна касаться окружности, вписанной в угол ACB и касающейся прямой CB в точке N (ибо для точки N верно равенство $\angle I'NC = (2\pi - \varphi)/4$, т. е. вписанной окружности треугольника ABC).

Заменив теперь в предыдущих рассуждениях слово «вписанная» на «внеписанная», получим то, что надо (имеются в виду внеписанные окружности треугольников ACB и $A'C'B'$, соответствующие вершине C). Тем самым теорема Фейербаха доказана.

Заметим, что в первой части доказательства мы воспользовались не всей теоремой о сегменте, а, так сказать, только ее половиной, ибо теорема говорит о двух фиксированных окружностях, касающихся окружности ω . Одна из них в данном случае — это вписанная в треугольник ABC окружность. А где вторая? Ответ на этот вопрос дает следующее упражнение.

Упражнение 16. От остроугольного треугольника ABC прямой, касающейся его вписанной окружности, отрезали равнобедренный треугольник AKL с основанием AK (рис. 14). Докажите, что вписанная в треугольник AKL окружность касается окружности девяти точек треугольника ABC .

Так как такой «треугольничек» можно отрезать от каждого из трех углов треугольника ABC , то получаем уже не одну, а три окружности, касающиеся окружности девяти точек (почему, кстати, три, а не шесть?).

А если похожую процедуру проделать с вневписанной окружностью?

Упражнение 17. На продолжениях сторон BA и CA остроугольного треугольника ABC за точку A взяли точки M и N соответственно, так, что прямая MN касается вневписанной окружности треугольника ABC , соответствующей вершине C , а треугольник AMN — равнобедренный с основанием AM . Докажите, что вневписанная окружность треугольника AMN , соответствующая вершине N , касается окружности девяти точек треугольника ABC .

Точки M и N можно было бы взять и на продолжениях сторон AB и CB за точку B , и мы получили бы еще одну окружность, касающуюся окружности девяти точек.

Упражнение 18. Пусть вневписанная окружность треугольника ABC касается продолжений сторон CA и CB в точках K и L соответственно. На отрезке CK взята точка M , а на отрезке CL — точка N так, что прямая MN касается этой вневписанной окружности, а треугольник CMN — равнобедренный с основанием CM . Докажите, что вписанная в треугольник CMN окружность касается окружности девяти точек треугольника ABC .

Упражнения 17—18 каждой вневписанной окружности ставит в соответствие 3 окружности, касающиеся окружности девяти точек. Так как вневписанных окружностей у треугольника три, то получаем всего 9 окружностей.

Пора считать. Сколько мы уже знаем окружностей, касающихся окружности девяти точек?

Вписанная окружность, да 3 вневписанных, да 3 окружности из упражнения 16, да 9 окружностей из

упражнений 17, 18 — всего 16 окружностей.

Но и это еще не все!

Упражнение 19. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что треугольники ABC , AHC , AHB и BHC имеют общую окружность девяти точек.

Но каждый из перечисленных в упражнении 19 треугольников имеет свое множество из шестнадцати окружностей, касающихся окружности девяти точек, так что наша цифра учетверяется: получаются 64 окружности, касающиеся окружности девяти точек треугольника ABC . Результат, достойный книги Гиннеса!

В заключение поговорим о точках касания. В упражнениях 20—22 F — точка касания окружности девяти точек треугольника ABC и его вписанной окружности.

Упражнения

20. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности девяти точек последнего (рис. 15). Докажите, что прямые A_1A , B_1B , C_1C пересекаются в точке F .

21. Докажите, что окружности девяти точек треугольников $A_1B_1C_1$, $B_1C_1A_1$, $C_1A_1B_1$ пересекаются в точке F , где I — центр вписанного круга треугольника ABC .

22. Пусть A' , B' , C' — соответственно середины сторон BC , AC , AB треугольника ABC (вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что три прямые, соединяющие центры вписанных окружностей треугольников $AC'B'$, $BA'C'$, $CA'B'$ соответственно с серединами дуг BC , $A'B$, CA' окружности девяти точек треугольника ABC , пересекаются в точке F .

В заключение отметим, что теорема о сегменте имеет, по-видимому, еще множество интересных следствий. В формулировке теоремы есть два свободных параметра — угол O между прямыми a и b и угол φ . Мы рассмотрели лишь два частных случая: $\angle AOB = \varphi/2$ (упражнения 4 и 5) и $\angle AOB = (2\pi - \varphi)/2$ (теорема Фейербаха).

Возможно, при других соотношениях между $\angle AOB$ и φ тоже получатся интересные результаты.

Если читателю удастся найти новые следствия теоремы о сегменте или пополнить список окружностей, касающихся окружности девяти точек, просьба посылать их автору статьи в редакцию журнала «Квант».

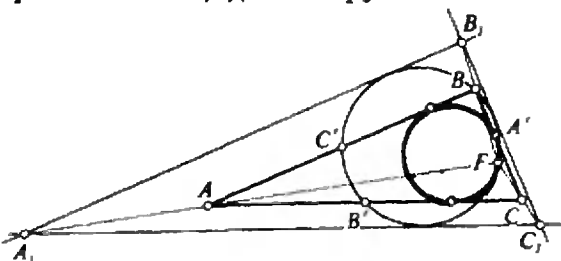


Рис. 15.



Абитуриенту

Геометрические решения экстремальных геометрических задач

П. ГОРНШТЕЙН, В. ПОЛОНСКИЙ, М. ЯКИР

Задачи, связанные с нахождением наибольших и наименьших значений геометрических величин, неспроста пользуются большой популярностью у составителей экзаменационных заданий: ведь чтобы решить подобную задачу, абитуриенту приходится комбинировать приемы и методы из весьма различных разделов школьного курса математики.

Первое, что приходит в голову, — составить с помощью заданных пара-

метров функцию и исследовать ее на максимум и минимум. У такого подхода тем не менее есть недостаток: во многих геометрических задачах этот привычный путь решения сопряжен со значительными техническими трудностями. В условиях экзамена, где так важно не ошибиться, этот недостаток особенно ощутим.

Часто, однако, удается избавиться от громоздких выкладок, обойдясь чисто геометрическими рассуждениями.

Вот примеры.

Задача 1 (МЭСИ). *На отрезках АВ и АС как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образовавшихся полуокружностей вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если АВ=4, АС=2, ∠ВАС=120°.*

Решение. Пусть O_1 и O_2 — середины соответственно отрезков АВ и АС (рис. 1). Тогда

$$O_1O_2 = \sqrt{AO_1^2 + AO_2^2 - 2AO_1AO_2\cos 120^\circ} = \sqrt{7}.$$

Пусть r — радиус окружности, о которой говорится в условии задачи, O — ее центр.

Для точек O_1, O_2, O имеем $O_1O + OO_2 \geq O_1O_2$, или $1-r+2-r \geq \sqrt{7}$. Отсюда $r \leq (3-\sqrt{7})/2$. Очевидно, знак равенства достигается лишь в том случае, когда точка O принадлежит отрезку O_1O_2 .

Ответ: $(3-\sqrt{7})/2$.

Задача 2 (МАИ). *Найдите периметр треугольника наибольшей площади, образованного большим основанием и продолжением боковых сторон трапеции, если известно, что длина верхнего основания трапеции в два ра-*

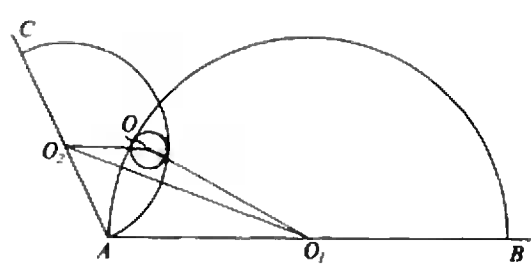


Рис. 1.

за меньше длины ее нижнего основания, а диагонали равны 5 и 6.

Решение. Пусть BC и AD — основания трапеции (рис. 2), $BC = \frac{1}{2}AD$. Выходит, что BC — средняя линия треугольника AED . Тогда

$$S_{BEC} = \frac{1}{4}S_{AED},$$

$$S_{ABCD} = \frac{3}{4}S_{AED},$$

$$\frac{4}{3}S_{ABCD} = S_{AED}.$$

Следовательно, площадь треугольника AED достигает максимального значения при максимальной площади трапеции $ABCD$. Очевидно, $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}AC \cdot BD$, т. е. площадь данной трапеции максимальна, если ее диагонали перпендикулярны.

Итак, искомый периметр — это периметр треугольника с перпендикулярными медианами:

$$P_{AED} = AE + ED + AD = 2AB + 2CD + AD = 2\sqrt{\frac{4}{9}AC^2 + \frac{1}{9}BD^2} + 2\sqrt{\frac{4}{9}BD^2 + \frac{1}{9}AC^2} + \sqrt{\frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{9}BD^2}.$$

Ответ: $\frac{26 + 4\sqrt{34} + 2\sqrt{61}}{3}$.

Задачи 3 (МАИ). В треугольнике ABC биссектриса, проведенная из вершины A , имеет длину 2, и $AB = 2AC$. На стороне AB взята точка M , а на стороне AC — точка N так, что

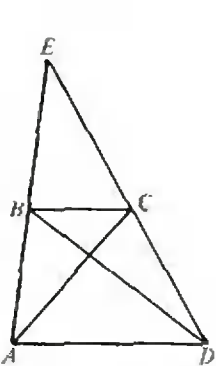


Рис. 2.

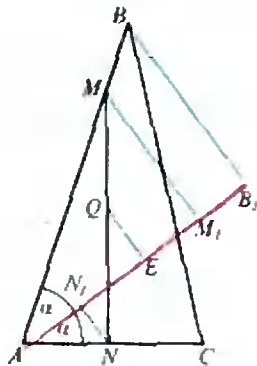


Рис. 3.

$BM = AN$. Найдите наименьшее возможное расстояние от середины отрезка MN до вершины A .

Решение. Пусть Q — середина отрезка MN , K — точка пересечения биссектрисы угла BAC и BC . Спроектируем точки M, N, Q и B на биссектрису угла BAC (рис. 3). Тогда

$$AN_1 = M_1B_1, N_1E = M_1E$$

(докажите!). Пусть $AC = m$, $AB = 2m$, $\angle BAE = \angle EAC = \alpha$. Тогда

$$AE = AN_1 + N_1E = \frac{1}{2}AB_1 = m \cos \alpha.$$

Отсюда

$$AQ \geq AE = m \cos \alpha.$$

Следовательно, искомое расстояние принимает наименьшее значение, когда середина Q отрезка MN лежит на биссектрисе. (Покажите, что положение точек M и N , при котором указанный случай реализуется, действительно существует.)

Для площади треугольника ABC имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 2\alpha = \frac{1}{2}AB \cdot AK \sin \alpha + \frac{1}{2}AK \cdot AC \sin \alpha,$$

или

$$m^2 \sin 2\alpha = m \sin \alpha + 2m \sin \alpha.$$

Отсюда $m \cos \alpha = 1,5$.

Ответ: 1,5.

Задача 4 (МИСиС). В параболу $y = ax^2 + bx + c$ вписан четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади с диагоналями AC и BD . Найдите координаты вершины C , если $A(-3; -4)$, $B(-2; -1)$, $D(1; -4)$.

Решение. Так как точки A, B, D лежат на параболы, то их координаты удовлетворяют ее уравнению:

$$\begin{cases} -4 = 9a - 3b + c, \\ -1 = 4a - 2b + c, \\ -4 = a + b + c, \end{cases}$$

откуда

$$a = -1, b = -2, c = -1.$$

Итак, уравнение заданной параболы найдено: $y = -(x+1)^2$. В условии указано, что AC — диагональ четырехугольника $ABCD$, значит, точка C лежит на дуге BD параболы (рис. 4). Для решения задачи достаточно найти координаты точки C , при которых площадь треугольника DBC максимальна, что, в свою очередь, равносильно поиску на дуге BD точки, максимально удаленной от прямой BD . Пусть l — касательная к параболе, параллельная BD . В силу характера выпуклости квадратичной функции все точки параболы лежат в одной полуплоскости относительно прямой l . Следовательно, точкой, максимально удаленной от прямой BD , будет точка касания.

Так как прямая BD не вертикальная, то ее уравнение имеет вид $y = kx + d$. Зная координаты точек B и D , легко установить, что $k = -1$. Значит, угловой коэффициент касательной l равен -1 , т. е. производная квадратичной функции, задающей параболу, в точке касания равна -1 . Имеем $-2(x_0 + 1) = -1$, где x_0 — абсцисса точки касания; отсюда $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$.

Задача 5 (УрГУ). К кривой $y = -x^2 + bx + 2$ в точках с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ проведены касательные. При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy , будет наименьшим?

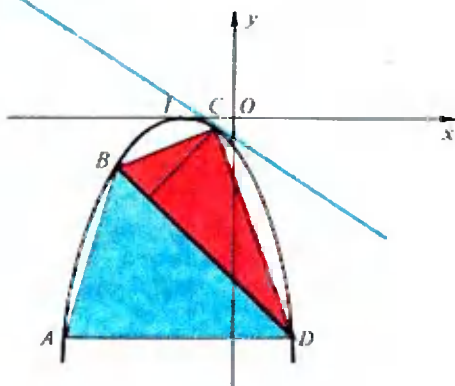


Рис. 4.

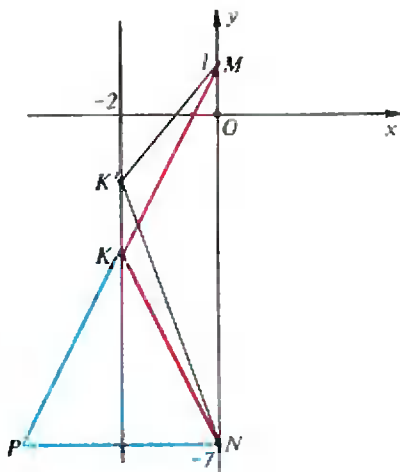


Рис. 5.

Решение. Уравнения касательных к заданной параболы в точках с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$ соответственно имеют вид $y = (b-2)x + 1$, $y = (b-6)x - 7$ (покажите это!). Отсюда две вершины треугольника, о котором говорится в условии, имеют координаты $M(0; 1)$ и $N(0; -7)$, а третья — $K(-2; 5-2b)$ (рис. 5). Следовательно, нужно найти такое положение точки K на прямой $x = -2$, при котором сумма $MK + KN$ была бы наименьшей.*)

Покажем, что искомая точка — это точка пересечения прямых $x = -2$ и PM , где точка P симметрична точке N относительно прямой $x = -2$. Пусть K' — произвольная точка прямой $x = -2$, отличная от K . Имеем $MK' + K'N = MK' + PK' > MP = PK + KM = KN + KM$. Поскольку средняя линия треугольника PMN лежит на прямой $x = -2$, треугольник MKN равнобедренный; тогда ордината точки K равна -3 . Отсюда $5-2b = -3$, $b = 4$.

Ответ: $b = 4$.

Задача 6 (МФТИ). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ лежит

*) Осталось решить «задачу о людоеде». Людоед живет в пещере M , обедает в деревне N и после плотной трапезы заходит по дороге домой напиться к ручью $x = -2$. Какой дорогой он должен идти, чтобы побыстрее добраться до пещеры? В менее кровожадной формулировке эта задача была упомянута, например, в «Калейдоскопе «Кванта» в третьем номере за этот год. (Прим. ред.)

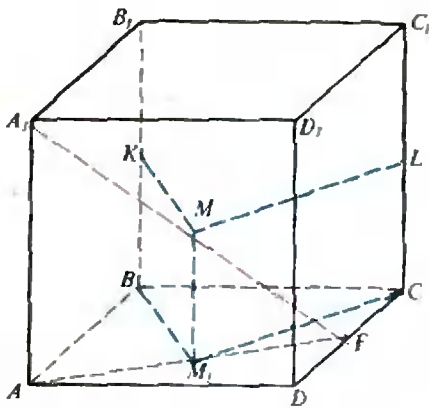


Рис. 6.

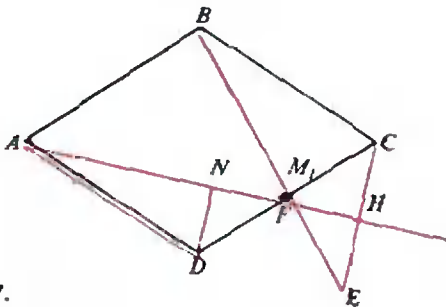


Рис. 7.

ромб $ABCD$ с углом $\angle A = 60^\circ$. Длины всех ребер призмы равны 1. Точка F — середина ребра DC , а точка M лежит на прямой AF . Определите наименьшее значение суммы площадей треугольников MVB_1 и MCC_1 .

Решение. Пусть MK и ML — высоты соответственно треугольников MVB_1 и MCC_1 (рис. 6), M_1 — проекция точки M на плоскость ABC . Тогда $M_1B = MK$, $M_1C = ML$ (докажите!) и

$$S_{MVB_1} + S_{MCC_1} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot M_1B + \frac{1}{2} CC_1 \times \\ \times M_1C = \frac{1}{2} (M_1B + M_1C).$$

Как и в предыдущей задаче, сумма $M_1B + M_1C$ принимает наименьшее значение, если M_1 — точка пересечения прямых AF и BE , где E — точка, симметричная точке C относительно прямой AF (рис. 7).*)

*) Снова задача о людоеде! (Прим. ред.)

Осталось найти длину отрезка BE . По теореме косинусов

$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2BC \cdot CE \cos \angle BCE = \\ = 1 + CE^2 - 2CE \cos(60^\circ + \varphi),$$

где $\varphi = \angle FCE$. Проведем в треугольнике ADF высоту DN . Видно, что $CE = 2DN$ и $\angle FCE = \angle NDF$. Но

$$DN = \frac{2S_{ADF}}{AF} = \frac{AD \cdot DF \cdot \sin 120^\circ}{\sqrt{AD^2 + DF^2 - 2AD \cdot DF \cos 120^\circ}} \\ = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

$$\cos \angle NDF = \frac{ND}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

После несложных вычислений полу-

$$\text{чаем } BE = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

Задача 7 (МАИ). В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра имеют одинаковую длину, равную 1. На ребре SA взята точка M так, что $SM = \frac{1}{4}l$, на ребре SB взята точка N , а на плоскости ABC взята точка P . Найдите наименьшую величину суммы длин отрезков MN и NP .

Решение. Длина отрезка NP минимальна, если P — проекция точки N на плоскость ABC . Очевидно, что P принадлежит медиане BE правильного треугольника ABC (рис. 8).

Теперь нужно найти кратчайшее расстояние от данной точки M до прямой BE по поверхности двугранного угла, образованного плоскостями ABS и BSE . Это все равно, что найти расстояние от точки до прямой на плоской развертке этого двугранного угла.

Рассмотрим такую развертку. Для этого в плоскости SBE построим треугольник SA_1B , равный треугольнику ASB (рис. 9). На стороне SA_1 отметим точку M_1 , в которую при разворачивании двугранного угла переходит точка M , так что $SM_1 = \frac{1}{4}l$. Как известно, кратчайшее рас-

стояние от точки до прямой есть пер-

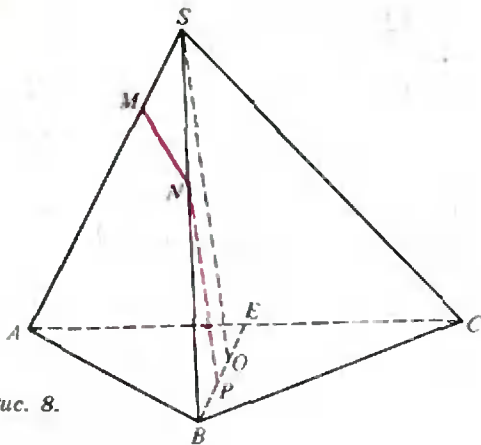


Рис. 8.

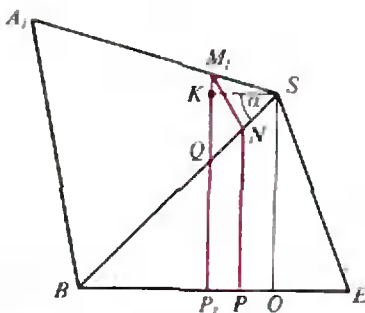


Рис. 9.

пендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую. Поэтому проведем $M_1P_1 \perp BE$. Очевидно, что сумма $MN + NP = M_1N + NP$ минимальна тогда и только тогда, когда $P = P_1$ и $N = Q$. Осталось выяснить, чему равна длина отрезка M_1P_1 .

Проведем $SK \perp M_1P_1$. Пусть $\angle KSB = \angle SBE = \alpha$. Высота SO пирамиды равна $l\sqrt{\frac{2}{3}}$ (покажите!). Тогда

$$\begin{aligned} M_1P_1 &= M_1K + SO = \frac{l}{4} \sin(60^\circ - \alpha) + \\ &+ l\sqrt{\frac{2}{3}} = \\ &= \frac{l}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) + l\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Выразив $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ из треугольников SBE и SBO , получим ответ:

$$\text{Ответ: } \frac{l}{8} \left(1 + 7\sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

Конечно, все эти задачи можно решать путем составления функции и

исследования ее на экстремум. Но решение будет куда более громоздким.

Задачи для самостоятельного решения

1 (МАИ). Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$ наибольшей площади, если известно, что его вершина A удалена от середины сторон BC и CD на 6 и 8 единиц соответственно.

2. Две дуги окружностей радиусами R с центрами в точках A и B таких, что $AB=R$, пересекаются в точке C . Впишите в криволинейный треугольник ABC равнобедренную трапецию наибольшей площади.

3 (ЛГУ). Даны точки $A(0; 3)$, $B(4; 5)$. На оси Ox найдите такую точку C , чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

4 (ЛГУ). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеций равны a и b ?

5. На координатной плоскости рассматриваются правильные треугольники, у которых две вершины лежат на прямой $y = x + 2$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству $x^2 \leq y \leq x + 2$. Найдите наибольшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

6 (УГУ). К кривой $y = -x^3 + bx$ в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{3}{2}$ проведены касательные.

При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy , будет наименьшим?

7 (МФТИ). Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E , на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма

$ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1 = 1$, $FD = \frac{3}{4}$, $EF = \frac{1}{2\sqrt{3}}$?

8 (МАИ). В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что расстояния от точек A , B , C , S до середины ребра BC равны 4. При какой величине угла, образованного плоскостями ACS и SCD , объем пирамиды будет наибольшим?

Алгебраические уравнения и неравенства

Начиная с этого номера, мы в течение всего учебного года будем публиковать тематические подборки задач по основным разделам школьного курса математики. Решение предлагаемых задач поможет вам лучше усвоить школьный курс, а также подготовиться к вступительным экзаменам в вузы. Публикуя их, мы надеемся хотя бы частично скомпенсировать острейший дефицит литературы, дополняющей школьные учебники.

Первая наша подборка содержит алгебраические уравнения и неравенства. Задачи эти взяты из вариантов вступительных экзаменов в различные вузы, пособий для поступающих, а также составлены автором подборки.

1. Решите уравнения «с модулем»:

- а) $2|x+1| - |x| = 1$;
- б) $|x| - 2|x+1| + 3|x+2| = 4$;
- в) $x^2 - |x - \frac{1}{4}| = 0$;
- г) $|x^2 - 2|x|| = 3x^2 - x$;
- д) $|x - |x - |x - 1|| = 1/2$;
- е) $||-x - 4| + x + 2| = x + 7$;
- ж) $||x^2 - 3x^2 - 1| - 4| = x^5 + 3x^2 + 3$;

2. Решите рациональные уравнения:

- а) $x^2 + 1993x + 1992 = 0$;
- б) $1992x^2 - 1993x + 1 = 0$;
- в) $(x^2 - 2x)^2 = 3(x - 1)^2 - 13$;
- г) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{5}{4}$;
- д) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$;
- е) $x(x-1)(x+3)(x-4) + 36 = 0$;
- ж) $(x^2 - 3x + 1)^2 + 3(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 4(x-1)^2$;
- з)* $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x-1)^2$;
- и) $3 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}$;
- к)* $x^2 + 4x - 1 = 0$.

3. Решите иррациональные уравнения:

- а) $x = 1 + \sqrt[7]{-x}$;
- б) $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1$;
- в) $\sqrt{8x + 1} - \sqrt{x - 2} = 4$;
- г) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x - 3} = \sqrt{5x + 4}$;
- д) $(9 - x^2)\sqrt{2 - x} = 0$;
- е) $\frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{2x - 5} = \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x - 2}$;
- ж) $\sqrt{x - 3} + 4 = \sqrt{x - 3}$;
- з) $8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33$;
- и) $\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 9} = 4$;

- к) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+2}$;
- л) $\sqrt{5x+7} - \sqrt{x+4} = 4x+3$;
- м) $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+x+5} = \sqrt{2x^2+2x+17}$;
- н) $\sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = -4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4}$;
- о) $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3} + \sqrt{x^2+3x-1}$;
- п) $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$;
- р) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2$;
- с) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5} - 3\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{2}$;
- т) $\sqrt{5x^2+6x+1} - \sqrt{6x^2+4x-2} = \sqrt{x^2+7x+6} + \sqrt{2x^2+5x+3}$.

4. Решите неравенства «с модулем»:

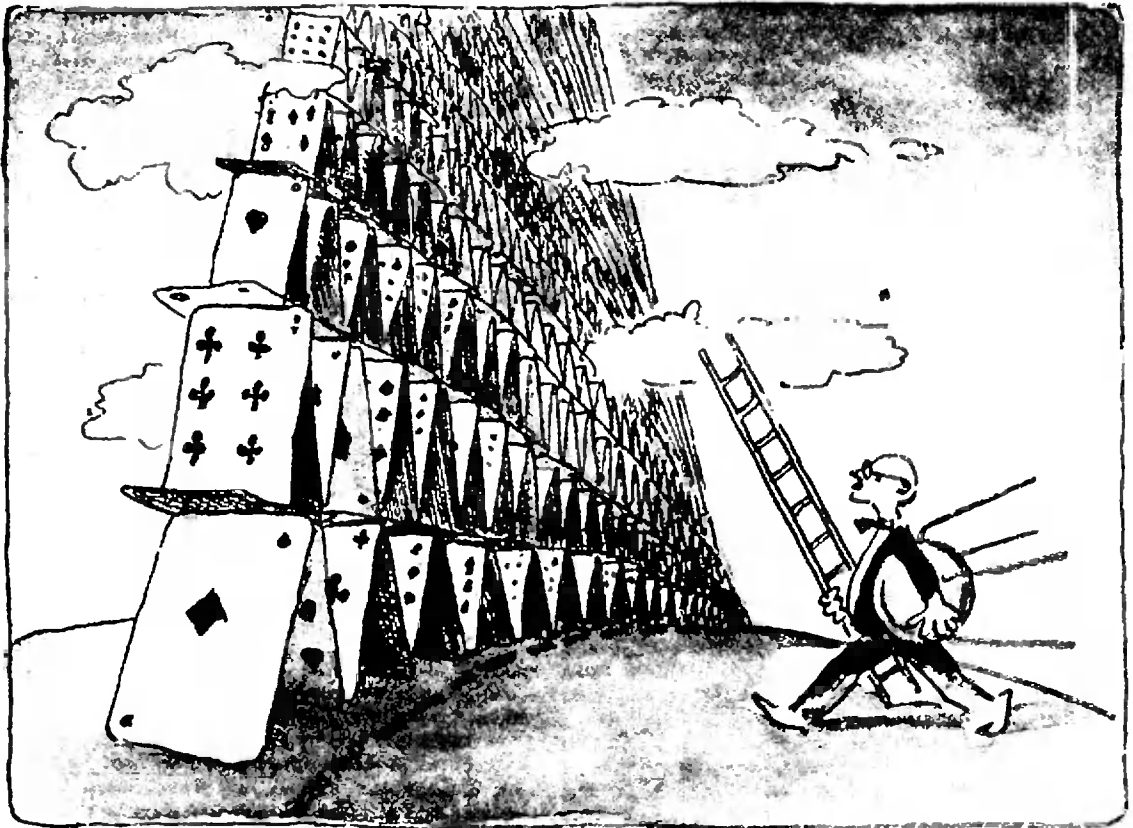
- а) $|x-1| < 2$;
- б) $|2x+1| < \frac{x+2}{2}$;
- в) $|x+1| - |x-1| \geq 1$;
- г) $||2x+1| - |x-1|| \leq x+2$;
- д) $|x^2 - 4|x| + 3| < 1$;
- е) $|x^2 - 5x| \leq x+3$;
- ж) $|x^2 - 3x| \geq x+2$;
- з) $|2x^2 - x - 1| \geq |x^2 - 3x - 1|$;
- и) $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2$;
- к)* $|x^4 - 3x + 1| \leq |x^3 + x^2 - 1|$;
- л) $|x^3 - 3x + 1| \leq x^3 + x^2 - 1$;
- м) $|x^3 - 3x + 2| \geq x^3 + x^2 - 2$;
- н) во всех уравнениях пункта 1 замените знак «=» на «>» и решите полученные неравенства.

5. Решите рациональные неравенства:

- а) $x^3 - 36x \leq 0$;
- б) $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 3) \leq 4$;
- в) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3x+1} > 0$;
- г) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} > 0$;
- д) $\frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 1} \geq x + 1$;
- е) $\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 + x - 2} \geq \frac{x}{3x^2 - x - 3}$;
- ж) $(x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \geq 0$;
- з)* $\frac{x+6}{x-6} \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6} \left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 > 2 \frac{x^2 + 36}{x^2 - 36}$;

и) во всех уравнениях пункта 2 замените знак «=» на «>» и решите полученные неравенства.

(Окончание см. на с. 67)



Р-значит ракета

Per funicula ad astra*

Д. ДЖОНС

Являясь пионером освоения воздушного пространства, Дедал до сих пор не потерял интереса к проблемам авиации и космонавтики. В настоящее время он размышляет над проблемами запуска искусственных спутников без использования ракет, которые, на его взгляд, несовершенны и неэкономичны. Дедал предлагает возвести на экваторе башню высотой 35 700 км. Вершина такой башни, вращающейся

вместе с Землей, движется с космической скоростью; достаточно поэтому поднять спутник наверх и оттолкнуть его. Если этот проект не будет принят, Дедал предлагает взамен более дешевый вариант: запустить на геостационарную орбиту высотой 40 000 км спутник, к которому привязан трос. Другой конец троса закрепляется на экваторе, и спутник удерживает трос в натянутом состоянии. В дальнейшем по этому тросу можно было бы запускать небольшие спутники. К сожалению, из-за действия на запускаемый спутник кориолисовой силы трос будет отклоняться в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Но Дедал надеется, что вскоре трос снова натянется и вернется в рабочее положение.

* По канату — к звездам (лат.).



1. Параметры геостационарного спутника. Период обращения спутника определяется уравнением $T^2 = 4\pi^2 a^3 / (GM)$, где T — период обращения, G — универсальная гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$, a — радиус орбиты, M — масса центрального тела (для Земли $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$). Поскольку Земля совершает один оборот за 24 ч ($T = 86\,400 \text{ с}$), в соответствии с этим уравнением получаем $a = 42\,230 \text{ км}$. Спутник, находящийся на этом расстоянии от центра Земли, т. е. на высоте $h = a - r_0 = 42\,230 - 6\,370 = 35\,860 \text{ км}$ над поверхностью Земли, будет «висеть» над одной и той же точкой экватора.

2. Привязной геостационарный спутник. Каждый участок троса должен выдерживать вес остальной части троса, расположенной ниже. Для этого трос должен утолщаться кверху приблизительно по экспоненциальному закону. Площадь сечения троса S_a вблизи спутника, находящегося на геостационарной орбите, связана с площадью сечения троса S_0 у поверхности Земли соотношением $S_a \approx S_0 \exp(\rho r_0 g / E)$, где ρ — плотность материала троса, g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли, E — модуль упругости материала троса, r_0 — радиус Земли.

3. Привязной спутник на шарнире. Такой спутник может иметь любой период обращения (например, можно протянуть трос к Луне). Однако силы, действующие на ось, могут оказаться очень большими.

Вдохновленный отсутствием возражений по поводу его проекта «заякорить» на тросе геостационарный спутник, Дедал выдвигает еще более смелый проект. Он предлагает построить лифт на Луну. Для этого потребу-

ется только достаточно мощная ракета, несущая трос в десять раз длиннее и с гарпуном на конце. При падении ракеты на Луну гарпун намертво закрепится в лунном грунте. Поскольку Луна всегда обращена к Земле одной стороной, на лунном конце троса никаких проблем не будет. Проблемы, как всегда, возникнут на Земле — из-за ее суточного вращения. Впрочем, трос можно закрепить на шарнире у Южного полюса. Если трос закрепить на экваторе, то он намотается на Землю и притянет Луну. Дедал, однако, опасается, что этот про-

ект, несмотря на всю его привлекательность с точки зрения геофизиков и селенологов, вызовет возражения со стороны представителей Высокой Науки. Если проект будет принят, то Дедал предлагает опустить Луну в Тихий океан, чтобы заодно проверить гипотезу, согласно которой этот океан образовался, когда Луна откололась от Земли.

New Scientist, October 16, 1965

Комментарий Дедала

Эти две мои идеи появились на страницах журнала одними из первых. Они высказывались весьма неуверенно, ибо в ту пору редакция еще сомневалась, можно ли публиковать на страницах солидного журнала столь смелые предложения. Поэтому я был очень рад, когда основные положения обоих проектов были позднее повторены Дж. Д. Айзексом, А. Вайном, Г. Брандером и Дж. Ваккусом в журнале *Science* (151, Febr. 11, 1966, p. 682). Цитирую:

Помимо способности удерживаться в натянутом состоянии трос, закрепленный на экваторе вращающейся планеты или на естественном спутнике планеты (возможно, и на полюсе быстро вращающегося тела) и выходящий достаточно далеко за пределы орбиты стационарного спутника, будет обладать и другими интересными и полезными свойствами.

Массы, перемещаемые вдоль троса от поверхности центрального тела, будут за-

пускаться в космическое пространство частично за счет энергии, отбираемой у вращающегося центрального тела.

Далее авторы рассчитывают прочность и сечение троса, указывают подходящие материалы для его изготовления и анализируют, на каких планетах и спутниках Солнечной системы этот проект легче всего реализовать.

Переписка с Артуром Кларком, в романе которого «Фонтаны рая» упоминается орбитальная башня высотой 35 700 км, открыла мне, что эти мысли не так уж новы. Проект орбитальной башни впервые был предложен К. Э. Цюлковским еще в 1895 г. Орбитальный трос был описан ленинградским инженером Ю. Арцутановым в «Комсомольской правде» от 31 июля 1960 г. Трос до Луны, по-видимому, придуман С. Голомбом в 1962 г. (*Astronautics*, 7—8, 1962, p. 26).

Артур Кларк сообщил мне: «...основная работа в этой области проводится Джеромом Пирсоном на базе ВВС США Райт-Паттерсон в штате Огайо. Его первая статья озаглавлена «Орбитальная башня: установка для запуска космических аппаратов, использующая энергию вращения Земли» (*Acta Astronautica*, 2, 1975, p. 785). Пирсон думал, что эта идея целиком принадлежит ему, ибо библиографический поиск с помощью ЭВМ не выявил даже статью Айзекса!»

Наверное, следовало бы еще раз внимательно просмотреть и альбомы Леонардо да Винчи. Я утешаюсь тем, что фирма КОШМАР по крайней мере была одним из независимых авторов этих впечатляющих проектов.

Из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала» (М.: Мир, 1985).

Алгебраические уравнения и неравенства

(Начало см. на с. 64)

6. Решите иррациональные неравенства:

а) $\sqrt{2+x} > x$;

б) $\sqrt{4x+5} > x$;

в) $\sqrt{2x^2+x} > 1+2x$;

г) $\sqrt{x-6}\sqrt{x+3} < x-2$;

д) $\sqrt{x^2-3x-18} < x-2$;

е) $\sqrt{2x^2-3x-5} < x+\sqrt{5}$;

ж) $\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1} < 1$;

з) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+5} \leq 1$;

и) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$;

к) $\frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leq 2x+3$;

л) $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x} > 1$;

м) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$;

н) $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$;

о) $\sqrt{9-\frac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\frac{9}{x}}$;

п) $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x-\frac{1}{x}} > \frac{2}{x}$;

р) замените в уравнениях пункта 3 знак « \Leftarrow » на знак « $>$ » и решите полученные неравенства. Какие дополнительные трудности по сравнению с решениями уравнений у вас возникли и как вы их преодолели?

Ответы, краткие решения и указания будут опубликованы в следующем номере.

Материалы подготовил А. Егоров

Шара и кроссворды

Крискросе, пра-кроссворд и другие

Мы сообщали, что летом 1992 года в Нью-Йорке состоялся 1-й Чемпионат мира по решению головоломок. Его участники решали логические, цифровые, буквенные и другие задачи. Большинство типов головоломок чемпионата хорошо известны и одинаково популярны у нас и за океаном, но есть исключения.

Э	Д	Д	И	К	А
А	Д	Ж	Е	Й	Н
Н	О	У	О	Ж	Д
А	Л	Л	А	Н	И
И	Л	И	Н	Д	А
Д	И	А	Р	А	С

Рис. 1.

Например, в нашей стране практически не знают головоломку «крискросе». Крискросс выглядит как коврик произвольной конфигурации, сплошь покрытый буквами (рис. 1). На коврике нужно найти определенные слова, например мужские и женские имена. Слова разрешается читать по горизонтали, вертикали или диагонали в любом направлении, в том числе, справа налево и снизу вверх. Привлекательность крискросса в том, что его легко придумать самому и самому оценить его качество: в коврике должно быть как можно меньше неиспользуемых клеток, заполненных произвольными буквами.

Самая популярная словесная головоломка в мире — это кроссворд. Мы привыкли к одному типу кроссвордов, а их существует множество. Посмотрите на рисунок 2. На нем показаны кроссворды, имеющие квадратные и крестообразные поля, составленные из клеточек без номеров. Нет номеров — нет и перечня точных заданий на слова, которые требуется вписывать. Но не думайте, что от этого задача становится легкой. Клеточки нужно заполнить так, чтобы в каждой

строке и каждом столбце помещалось целое слово (существительное единственного числа) и не осталось пустых клеток. Поскольку эти кроссворды более древние, чем обычные, давайте назовем их «пра-кроссворды».

Как вы понимаете, чем больше поле пра-кроссворда, тем труднее решить задачу. Но до каких размеров можно увеличивать поле? Ясно, что для каждого языка мира ответ будет своим. Для русского языка максимальные размеры поля пока неизвестны. Поэтому мы предлагаем читателям следующую задачу: найдите квадратный пра-кроссворд максимального размера.

Решение, претендующее на рекорд, должно удовлетворять одному из двух условий:

1. Поле не должно содержать одинаковых слов (пра-кроссворд 1-го рода).

2. Каждое слово должно использоваться дважды: один раз по горизонтали, другой раз по вертикали. Слова должны идти в одинаковом порядке слева направо и сверху вниз (пра-кроссворд 2-го рода).

Примеры обоих пра-кроссвордов показаны на рисунке 2. Будем считать их размеры стартовыми; посмотрим, на что способны читатели «Кванта».

Предлагаем вам также придумать максимальные пра-кроссворды на крестообразных полях различной формы. Поле может быть любой конфигурации, но обязательно симметричное. Следует стремиться не только к максимальной длине слов, но и к большему числу строк и столбцов на поле. Внутри креста не должно быть пустых клеток. Для построения пра-кроссвордов разрешается использовать компьютер.

А. Калинин

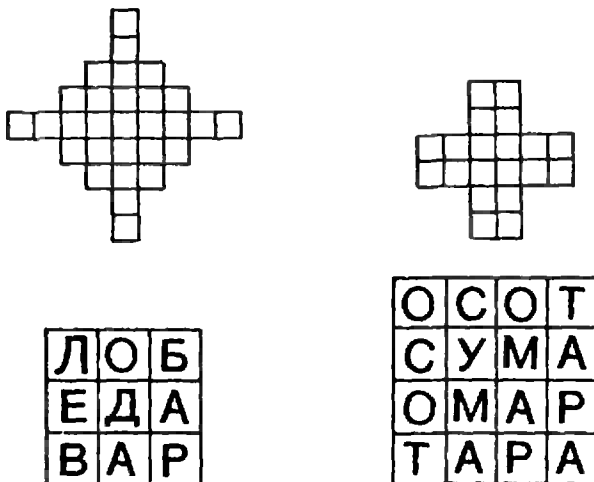


Рис. 2.

Олимпиады

XXXIII Международная математическая олимпиада

С 10 по 21 июля в Москве проходила Международная математическая олимпиада. В ней участвовало 350 школьников из 65 стран. В командном зачете первое место завоевала команда Китая (240 очков, 6 золотых медалей), второе — команда США (181 очко, 3 золотых, 3 серебряных медали), третье — команда Румынии (177 очков, 2 золотых, 2 серебряных, 2 бронзовых медали), четвертое — команда СНГ (176 очков, 2 золотых, 3 серебряных медали), пятое — команда Великобритании (168 очков, 2 зо-

лотых, 2 серебряных, 2 бронзовых медали). Команда России заняла шестое место (158 очков, 2 золотых, 2 серебряных, 2 бронзовых медали).

Журнал «Квант» наградил своим призами школьника из Таиланда Пиная Линвонга за наиболее изящное решение задачи № 1, Этони Гардинера, профессора Бирмингемского университета (Великобритания), за самую интересную задачу олимпиады (задача № 6) и Лизу МакШайн, руководителя команды Республики Тринидад и Тобаго, за лучшую проверку и представление решений задач своих школьников.

Подробный отчет о проведении XXXIII Международной математической олимпиады мы опубликуем в № 12 нашего журнала.

Задачи LV Московской математической олимпиады (1992 г.)

8 класс

8.1. Докажите, что если $a+b+c+d>0$, $a>c$, $b>d$, то $|a+b|>|c+d|$.

И. Сергеев

8.2. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур?

С. Токарев

8.3. Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме — во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

С. Токарев

8.4. Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на 3, и на 4, и на 5 кучек равной массы?

С. Токарев

8.5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла не превосходит по длине половины проекции гипотенузы на прямую, перпендикулярную биссектрисе.

С. Гашков

8.6. Можно ли 4 раза рассадить 9 человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза?

С. Токарев

9 класс

9.1. Каждый участник шахматных соревнований выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные вместе взятые — черными. Докажите, что все участники выиграла поровну партий.

С. Токарев

9.2. Каких нечетных натуральных чисел $n < 10\,000$ больше: тех, для которых число, образованное четырьмя последними цифрами числа n^9 , больше n , или тех, для которых оно меньше n ?

А. Галочкин

9.3. В центре квадратного пирога находится изюминка. От пирога можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т. д. Можно ли отрезать изюминку?

С. Токарев

9.4. В квадратной таблице из 9×9 клеток отмечены 9 клеток, лежащие на пересечении второй, пятой и восьмой строк со вторым, пятым и восьмым столбцами. Сколькими путями можно из левой нижней клетки попасть в правую верхнюю,

двигаясь только по неотмеченным клеткам вверх или вправо?

А. Сливак

9.5. Диагональ AC трапеции $ABCD$ равна боковой стороне CD . Прямая, симметричная BD относительно AD , пересекает прямую AC в точке E . Докажите, что прямая AB делит отрезок DE пополам.

И. Шарыгин

9.6. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза, если а) $n=5$? б) $n=10$?

С. Токарев

Замечание. Эта задача легко решается и для произвольного натурального n .

10 класс

10.1. Докажите, что если сумма косинусов углов четырехугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырехугольник.

А. Галочкин

10.2. От пирога, имеющего форму выпуклого пятиугольника, можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т. д. В какие точки пирога можно воткнуть свечку, чтобы ее нельзя было отрезать?

С. Токарев

10.3. В левом нижнем углу прямоугольной доски из $m \times n$ клеток стоит белая фишка, а в правом верхнем — черная. Двое по очереди двигают фишки (каждый свою) по горизонтали или по вертикали на 1 клетку, причем белая может двигаться только вправо или вверх. Выигрывает тот, кто ставит фишку на клетку, занятую фишкой противника. Начинают белые. Кто может обеспечить себе выигрыш?

А. Галочкин

10.4. Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на 4, и на 5, и на 6 кучек равной массы?

С. Токарев

10.5. Докажите, что в выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно поместить ромб вдвое меньшей площади.

С. Гашков

10.6. Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с четным чис-

лом сторон. Обязательно ли его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну ребер разных цветов?

С. Токарев

11 класс

11.1. Требуется заполнить числами квадратную таблицу из $n \times n$ клеток так, чтобы сумма чисел на любой из $4n-2$ диагоналей равнялась 1. Можно ли это сделать при а) $n=55$? б) $n=1992$?

С. Токарев

11.2. Найдите углы выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle BAC=30^\circ$, $\angle ACD=40^\circ$, $\angle ADB=50^\circ$, $\angle CBD=60^\circ$ и $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$.

В. Кукушкин

11.3. Аладдин побывал во всех точках экватора, двигаясь то на восток, то на запад, а иногда мгновенно перемещаясь в диаметрально противоположную точку Земли. Докажите, что был отрезок времени, за которое разность расстояний, пройденных Аладдином на восток и на запад, не меньше половины длины экватора.

А. Скопенков

11.4. Внутри тетраэдра расположен треугольник, проекции которого на 4 грани тетраэдра имеют площади P_1, P_2, P_3, P_4 . Докажите, что а) в правильном тетраэдре $P_1 \leq P_2 + P_3 + P_4$; б) если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади соответствующих граней тетраэдра, то $P_1 S_1 \leq P_2 S_2 + P_3 S_3 + P_4 S_4$.

А. Сливак

11.5. Всегда ли ребра выпуклого многогранника можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой грани количества ребер разных цветов отличались не более чем на 1?

С. Токарев

11.6. Прибор для сравнения чисел $\log_a b$ и $\log_c d$ ($a, b, c, d > 1$) работает по правилам:

если $b > a$ и $d > c$, то он переходит к

сравнению чисел $\log_a \frac{b}{a}$ и $\log_c \frac{d}{c}$;

если $b < a$ и $d < c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_a c$ и $\log_b a$;

если $(b-a)(d-c) \leq 0$, то он выдает ответ.

а) Покажите, как прибор сравнит числа $\log_{25} 75$ и $\log_{65} 260$.

б) Докажите, что любые два неравных логарифма он сравнит за конечное число шагов.

И. Сергеев

Публикацию подготовил С. Токарев

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1992 года

9 класс

1. Паровоз серии ФД («Феликс Дзержинский») развивал максимальную тяговую мощность $P=1000$ кВт, причем на полезную работу шло лишь 10% энергии пара. Оцените массу воды в котле такого паровоза, если на его растопку из холодного состояния требовалось $t=15$ мин. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К).

2. Некто повесил на гвоздь картину, прикрепив веревку ниже центра тяжести на d (рис. 1). Длина веревки a , высота картины $2l$. Под каким углом α к стене она будет висеть? При каком соотношении между d , a и l картина не перевернется? Трение о стену отсутствует.

3. Из одной точки горизонтально в противоположных направлениях одновременно вылетают две частицы с начальными скоростями v_1 и v_2 . Через какое время угол между скоростями частиц станет равным 90° ? Ускорение свободного падения g .

4. Внутри полого горизонтального цилиндра прыгает шарик, упруго отражаясь от его стенок. Ускорение силы тяжести g . Известно, что шарик движется по замкнутой траектории, отскакивая от стенок в

двух точках, находящихся на одной высоте. Найдите все возможные траектории. Каким будет ответ в том случае, если шарик подпрыгивает выше осевой линии?

5. Отверстие в дне горизонтального сосуда закрыто легким полусферическим колпачком радиусом R (рис. 2). Сосуд наполнен жидкостью плотностью ρ . Дно находится на глубине H . Найдите силу, с которой колпачок давит на дно сосуда. Ускорение силы тяжести g . Объем шара радиусом R равен $4\pi R^3/3$.

6. На горизонтальном шероховатом столе лежат длинная линейка AB и ластик C (рис. 3). Линейку двигают равномерно и поступательно в направлении, показанном стрелкой, и перемещают на расстояние H . Угол между линейкой и направлением ее перемещения α . Найдите величину и направление перемещения ластика относительно стола. Коэффициент трения ластика о линейку μ .

10 класс

7. На невесомый жесткий стержень, шарнирно закрепленный одним концом, надели массивную бусинку, которая может скользить по нему без трения. Вначале стержень покоился в горизонтальном положении, а бусинка находилась на расстоянии l от закрепленного конца. Затем стержень отпустили. Найдите зависимость угла, который составляет стержень с горизонталью, от времени.

8. Тонкое жесткое диэлектрическое кольцо массой M и радиусом R может свободно вращаться вокруг фиксированной вертикальной оси O (рис. 4). Кольцо

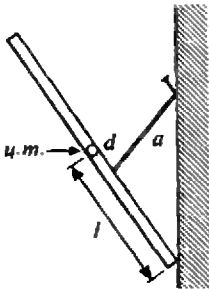


Рис. 1.

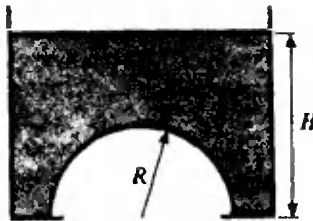


Рис. 2.

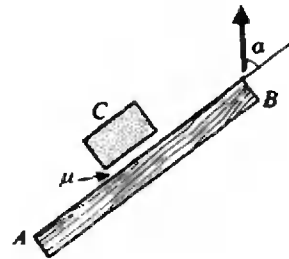


Рис. 3.

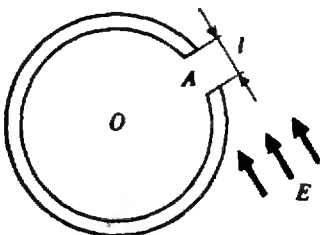


Рис. 4.

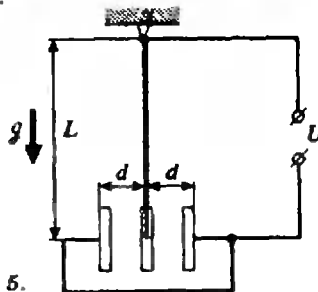


Рис. 5.

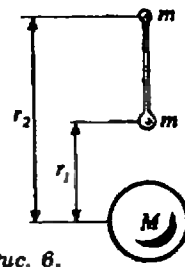


Рис. 6.

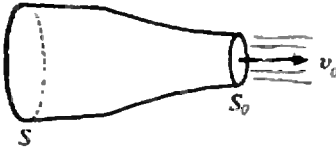


Рис. 7.

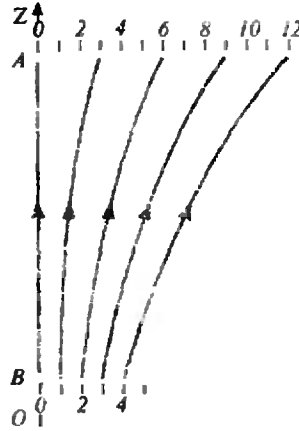


Рис. 8.

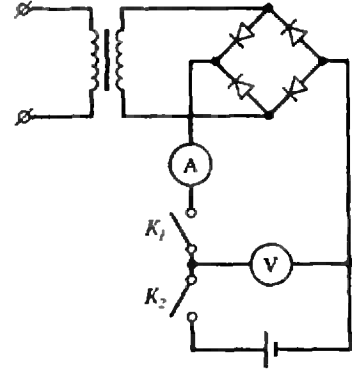


Рис. 9.

равномерно заряжено по длине, его заряд равен Q . Небольшой кусок кольца в области точки A вырезан так, что получился зазор длиной $l < R$. В начальный момент кольцо покоилось, после чего было включено однородное электрическое поле \vec{E} , перпендикулярное оси кольца и прямой OA . Найдите максимальную угловую скорость кольца.

9. Оцените максимальную массу капли воды, которая может «висеть» на вертикальном стекле, не сползая вниз. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

10. Плоский конденсатор состоит из трех одинаковых пластин площадью S каждая (рис. 5, вид сбоку). Крайние пластины неподвижны и соединены друг с другом. Средняя пластина, масса которой m , прикреплена к легкому стержню длиной L . Верхний конец стержня закреплен шарнирно. Расстояние между крайними пластинами $2d$ (d много меньше размеров пластины, L — много больше). При каком напряжении U произойдет пробой такого конденсатора? Воздух считайте идеальным диэлектриком.

11 класс

11. «Гантель», состоящая из двух одинаковых тел массой m , соединенных жестким невесомым стержнем, вращается вокруг небесного тела массой M (рис. 6). При этом каждая из масс m движется по круговой орбите радиусом r_1 или r_2 , а прямая, проходящая через стержень, все время проходит через центр небесного тела. Найдите период обращения такого «спутника».

12. Из горизонтальной трубы со скоростью v_0 вытекает вода, содержащая пузырьки воздуха (рис. 7). Площадь поперечного сечения трубы S , а выходного от-

верстия $S_0 < S$. Найдите отношение радиусов пузырьков воздуха у выходного отверстия и внутри трубы. Плотность воды ρ , температура ее постоянна, атмосферное давление p_0 . Вязкостью воды можно пренебречь, поверхностное натяжение не учитывайте.

13. Шарик зарядом $+q$ и массой m находится в однородном гравитационном поле (\vec{g} направлено вниз) и неоднородном электростатическом поле, симметричном относительно поворота вокруг оси OZ . Силовые линии поля в одной из плоскостей показаны на рисунке 8. В начальный момент шарик покоился в точке A . Когда заряд шарика изменился, он опустился в точку B . Используя рисунок, оцените, во сколько раз изменился заряд шарика.

14. Плавающая на поверхности пруда прямоугольная льдина, продольные размеры которой много больше ее толщины, выдерживает груз массой M , помещенный в центр льдины. Какой груз можно разместить на краю льдины (в середине ее ребра), чтобы он не коснулся воды? Плотность льда считайте равной $0,9$ г/см³.

15. Аккумулятор заряжают от двухполупериодного выпрямителя (питаемого синусоидальным напряжением), как показано на рисунке 9. Диоды идеальные, амперметр и вольтметр тоже идеальные и показывают средние по времени значения. В режиме холостого хода при замкнутом ключе K_1 вольтметр показывает $U_1 = 12$ В, а ток при этом отсутствует, т. е. $I_1 = 0$. Если замкнут только ключ K_2 , вольтметр показывает напряжение на аккумуляторе $U_0 = 12,3$ В. Во время зарядки, при замкнутых K_1 и K_2 , вольтметр показывает $U_2 = 12,8$ В, а амперметр $I_2 = 5$ А. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора.

Публикацию подготовил Д. Купцов

Физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит традиционную физико - математическую олимпиаду для учащихся средних школ, ПТУ, техникумов, а также для всех тех, кто хочет проверить свои знания по математике и физике и, возможно, по-

ступить к нам учиться. Олимпиада проводится в два тура: I тур — осенний, II тур — весенний. Задание I тура — по пять задач по математике и физике — публикуются ниже. Правильное решение каждой задачи оценивается в 5 баллов, за оригинальность решения добавляет-

ся еще 3 балла. Приглашение для участия во II туре рассылается участникам первого тура, набравшим наибольшее количество баллов по отдельным предметам.

Решения задач I тура необходимо выслать до 15 января 1993 года. Все решения оформите в одной школьной тетради. На листе (две страницы) должно быть решение только одной задачи. Для пояснения хода решения задач допускаются графические построения.

На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (см. анкету слева).

На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса (курса).

Тетрадь с решениями вышлите простой бандеролью. В пакет не забудьте вложить конверт с написанным на нем вашим адресом — для получения приглашения участвовать во II туре.

Наш адрес: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Олимпиада — МГТУ — 92.

Анкета участника I тура Олимпиады — МГТУ — 92

Фамилия

Имя

Отчество

Школа

Класс

Почтовый адрес

Оценки решений задач:

математика	м — 1	м — 2	м — 3	м — 4	м — 5
оценка					

общая оценка

физика	ф — 1	ф — 2	ф — 3	ф — 4	ф — 5
оценка					

общая оценка

Задачи первого тура

Физика

1. На краю прямоугольного обрыва высотой h лежит однородный шар радиусом R так, что центр шара находится прямо над краем обрыва. Определите место падения шара на землю, если его вывести из состояния неустойчивого равновесия. Считайте, что трения и сопротивления воздуха нет.

2. Электрическая цепь, изображенная на рисунке 1, состоит из 1991 источника

тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r каждый и 1991 резистора сопротивлением R . Чему равно напряжение на источниках?

3. С гладкой незакрепленной усеченной на высоте $H/2$ горки массой M скатывается без начальной скорости тело массой m . Высота горки H , угол наклона к горизонту α . На каком расстоянии от точки отрыва тело упадет на горизонтальную плоскость, на которой стоит горка? Трения между горкой и плоскостью нет.

4. На непроводящем тонком кольце массой m равномерно распределен неболь-

шой заряд q . Кольцо находится на гладкой горизонтальной поверхности и вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. В некоторый момент времени включается магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, так, что оно начинает тормозить вращение кольца. Индукция магнитного поля нарастает равномерно. При каком значении индукции кольцо остановится?

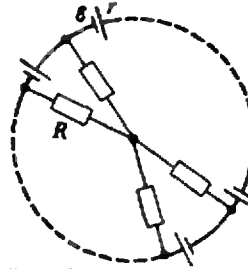


Рис. 1.

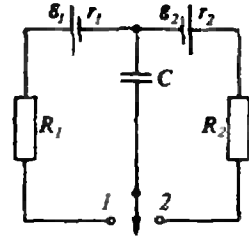


Рис. 2.

5. В схеме, представленной на рисунке 2, ключ замыкают поочередно с каждым из контактов 1 и 2 на очень малые одинаковые промежутки времени. Принимая, что изменение заряда конденсатора за время каждого включения очень мало, определите, какой максимальный заряд окажется на конденсаторе.

3. Докажите неравенство

$$\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \left(\frac{1}{\sin^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha}\right) \dots \dots \dots \left(\frac{1}{\sin^{2n} \alpha} + \frac{1}{\cos^{2n} \alpha}\right) \geq 2^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

4. Решите уравнение

$$(x - 1)^4 = (1 + 9x^2)(1 + (x^2 + x + 1)^2)$$

5. В зависимости от значений параметра a укажите число действительных корней уравнения

$$(ax + 2)^4 + a^4(x + 2)^4 = 2^5$$

Математика

1. Центр окружности, проходящей через середины сторон неравностороннего треугольника ABC , лежит на биссектрисе угла A . Найдите угол A .

2. Найдите сумму цифр всех целых чисел от 0 до 1 000 000, кратных 3.

Дорогие читатели!

Никогда еще, назначая вам встречу в следующем году, мы не знали так мало о том, при каких условиях она состоится. Жизнь заставила нас поднять цену журнала до 7 р. 70 к. за номер.

Но уже в августе стало ясно, что практически всю эту сумму нам придется отдать подписному агентству.

Мало того, примерно во столько же обойдутся нам бумага, типография и другие услуги.

Таким образом, издание журнала становится не просто убыточным, а прямо-таки разорительным делом. И если государство не поможет, мы не уверены, что нам не придется в будущем повысить цену.

Но цена, указанная в каталоге, для вас не окончательная: какую-то сумму с вас возьмет почта за доставку.

И тем не менее, давайте не думать о деньгах.

Ведь знания — бесценны!

Мы надеемся, что и в будущем году общие интересы и потребность в познании мира сведут нас вместе.

Но не забывайте — наш журнал распространяется только по подписке.

Редакция

**Ответы,
указания,
решения**

Рядовые школьные задачи по физике

1. В системе отсчета, связанной со скоростью течения реки v , встреча и расставание катеров происходят в одной и той же точке, а мост, двигаясь со скоростью v в противоположную сторону, за время 2τ смещается на расстояние l . Таким образом,

$$v = l / (2\tau) = 2 \text{ км/ч.}$$

2. См. рис. 1.

3. Запишем уравнения для перемещения тела за все время t и за время $t - \tau$, где $\tau = 1 \text{ с}$:

$$gt^2/2 = h, \quad g(t - \tau)^2/2 = h/4.$$

Отсюда

$$t = 2\tau = 2 \text{ с.}$$

4. Скорости первого и второго шариков в любой момент времени относительно земли равны

$$v_1 = v_0 - gt \quad \text{и} \quad v_2 = v_0 - g(t - \tau).$$

Искомая скорость второго шарика относительно первого равна

$$v_{\text{отн}} = v_2 - v_1 = g\tau$$

и направлена вверх. В момент встречи скорости одинаковы по модулю и противоположны по направлению:

$$v_2 = -v_1, \quad \text{или} \quad v_0 - g(t_0 - \tau) = -(v_0 - gt_0),$$

откуда

$$t_0 = v_0/g + \tau/2.$$

5. Ускорение книги относительно пола лифта зависит не от направления движения лифта (направления скорости), а от направления его ускорения. Если лифт поднимается с ускорением или опускается с замедлением, то ускорение книги будет равно $g + a$. Если же лифт поднимается с замедлением или опускается с ускорением, то ускорение книги будет $g - a$.

6. В системе отсчета, связанной со стенкой, молекулы подлетают к стенке со скоростью $v + u$ и с такой же скоростью отражаются от нее. При ударе каждая молекула передает стенке импульс $2m(v + u)$. За единицу времени на единицу площади поверхности стенки попадает $n(v + u)$ молекул. Поэтому давление на стенку равно

$$p = 2m(v + u)^2 \approx 10^5 \text{ Па.}$$

7. Запишем уравнение состояния идеального газа для двух случаев:

$$pV = (m/M)RT,$$

$$0,8pV = ((m - \Delta m)/M)R \cdot 0,9T.$$

Свяжем массу газа с его молярной массой, числом молекул и постоянной Авогадро:

$$m/M = N/N_A, \quad \Delta m/M = \Delta N/N_A.$$

Теперь найдем число молекул газа, просочившегося из баллона:

$$\Delta N = N_A m / (9M) = 5 \cdot 10^{24}.$$

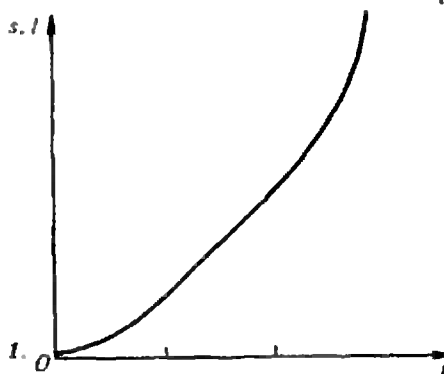
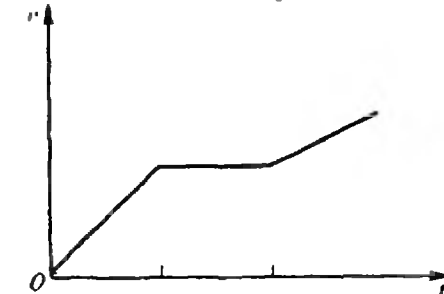


Рис. 1.

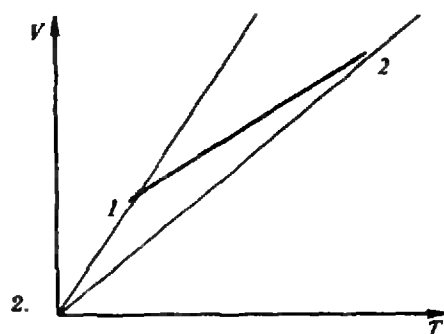


Рис. 2.

8. Из соотношений

$$m\bar{v}^2/2 = kT \quad \text{и} \quad pV = \nu RT,$$

записанных для двух различных состояний водорода, учитывая, что $\nu_2 = 2\nu_1$ и $m_2 = m_1/2$, получаем

$$\bar{v}_2/\bar{v}_1 = \sqrt{p_2/p_1} = 10.$$

9. Если провести через точки 1 и 2 изобары, соответствующие постоянным массам, то увидим, что первая изобара идет круче второй.

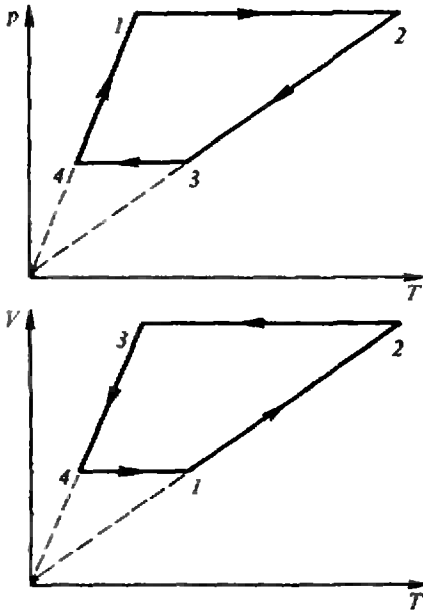


Рис. 3.

Следовательно, масса газа в состоянии 1 больше, чем в состоянии 2 (рис. 2).

- 10. См. рис. 3.
- 11. Согласно правилу Ленца, при сближении проводников направление тока I_2 противоположно направлению тока I_1 , а при удалении проводников направления токов совпадают.
- 12. Максимальное значение тока в витке получается из закона Ома $I = \mathcal{E} / R$ и закона электромагнитной индукции $\mathcal{E} = -\Phi'$:

$$I_m = \mathcal{E}_m / R = \Phi_m \omega / R = B_0 S \omega / R.$$

Тепловая мощность P связана с I_m соотношением

$$P = I_m^2 R / 2,$$

поэтому в нашем случае

$$P = (B_0 S \omega)^2 / (2R).$$

- 13. На концах проводника, движущегося в магнитном поле, возникает разность потенциалов

$$U = Blv,$$

откуда получаем искомую величину индукции магнитного поля:

$$B = U / (lv) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Тл.}$$

- 14. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции максимальна, когда магнитный поток минимален, и минимальна, когда поток максимален. Следовательно, когда рамка находится в плоскости, проходящей через провод с током, ЭДС индукции будет наименьшей, а когда рамка перпендикулярна этой плоскости, — наибольшей.
- 15. При вращении диска между его центром и периферийной точкой (где подключены подводящие провода) возникает разность потен-

циалов

$$U = Br(\omega r / 2) = B\omega r^2 / 2.$$

В соответствии с законом Ома, амперметр покажет ток

$$I = U / R = B\omega r^2 / (2R) = 0.4 \text{ А.}$$

**Геометрические решения
геометрических задач**

1. Ответ: $8\sqrt{13}/3, 4\sqrt{73}/3$. Решение. Пусть $S_{ABCD} = S$. Так как основания и высоты треугольников ABM и ACM равны (рис. 4), то $S_{ABM} = S_{ACM} = S/4$, аналогично, $S_{ADM} = S_{BDM} = S/4$; кроме того, $S_{MCN} = S_{BCD}/4 = S/8$. Отсюда $S_{MAN} = S - (S/4 + S/4 + S/8) = 3S/8$ и

$$S = 8S_{MAN}/3.$$

Ясно, что площадь параллелограмма будет наибольшей при наибольшем значении площади треугольника MAN . Но

$$S_{MAN} = \frac{1}{2} NA \cdot MA \sin \angle NAM$$

максимальна при $\angle MAN = 90^\circ$; тогда

$$S = \frac{8}{3} \cdot 24 = 64.$$

Если F — середина AD , то MQ — средняя линия трапеции $BCNA$. Имеем $FQ = DN/2 = DC/4$, $QM = (NC + AB)/2 = (NC + DC)/2 = 3DC/4$, $DC = 4QM/3$. Аналогично, $CB = 4NP/3$. Получаем $DC = 4\sqrt{6^2 + 4^2}/3 = 8\sqrt{13}/3$, $CB = 4\sqrt{8^2 + 3^2}/3 = 4\sqrt{73}/3$.

2. По условию, $AN = BM = R$. Для площади трапеции $AMNB$ (рис. 5) имеем $S = (R^2 \sin \angle AFB) / 2$; таким образом, S принимает наибольшее значение при $\angle AFB = 90^\circ$. Отсюда $\angle NAB = 45^\circ$.

3. Это простой вариант «задачи о людоеде» (рис. 6). Ответ: $(3/2; 0)$.

4. Ответ: $(a - b)^3 / 16(a + b)$. Решение. Пусть $OF = x$ — высота $\triangle POQ$, $OG = h_1$ — высота

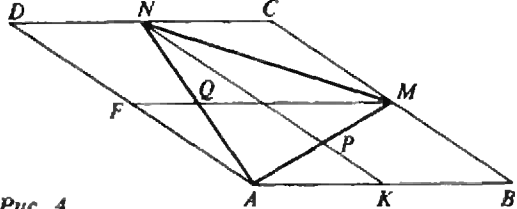


Рис. 4.

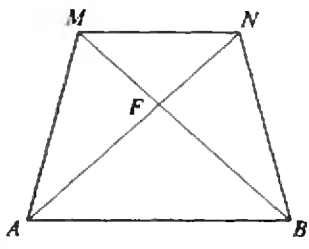


Рис. 5.

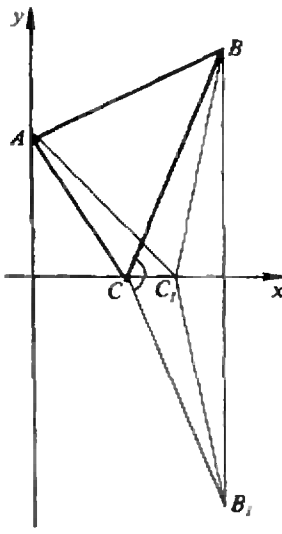


Рис. 6.

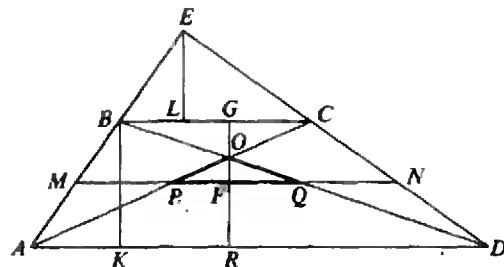


Рис. 7.

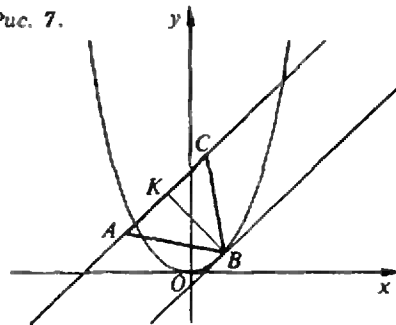


Рис. 8.

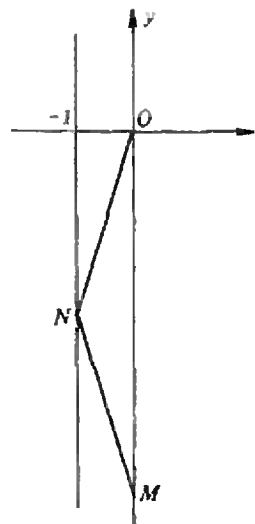


Рис. 9.

$\triangle BOC$, $BK=H$ — высота трапеции $ABCD$ и $EL=h_2$ — высота $\triangle BEC$ (см. рис. 7). Тогда $PQ=MN-(MP+QN)=(a-b)/2$. Из соображений подобия $OF:OG=PQ:BC$, $OR:OG=AD:BC$. Имеем:

$$\begin{cases} x/h_1=(a-b)/(2b), \\ (H-h_1)/h_1=a/b, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x/h_1=(a-b)/(2b), \\ H/h_1=(a+b)/b. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим после преобразований $x=H(a-b)/(2(a-b))$. Тогда $S_{POQ}=PQ/OF=(a-b)H/8(a+b)$. Таким образом, S_{POQ} максимальна при максимальном значении высоты трапеции, которая в свою очередь максимальна при максимальном значении высоты треугольника BEC , поскольку $(H+h_2)/h_2=a/b$, $H=h(a-b)/b$. Но из всех треугольников с заданным основанием и углом при вершине наибольшую высоту имеет равнобедренный. Поэтому $\angle BAD=\angle CDA=45^\circ$, $H=(a-b)/2$ и $S_{POQ}=(a-b)^3/(16(a+b))$.

5. Ответ: $27\sqrt{3}/32$. Решение. Очевидно, что третья вершина искомого треугольника лежит на дуге параболы (рис. 8). Ясно также, что эта точка лежит на касательной, параллельной прямой $y=x+2$ (см. решение задачи 4 в статье). Уравнение касательной $y=x-1/4$, точка касания $B(1/2; 1/4)$, высота искомого треугольника $BK=9\sqrt{2}/8$. Отсюда $S_{ABC}=BK^2 \cdot \text{tg } 30^\circ=27\sqrt{3}/32$.

6. Ответ: $27/8$. Решение. Касательные к данной кривой в точках $x=0$ и $x=-3/2$ задаются соответственно уравнениями $y=bx$ и $y=(b-27/4)x-27/4$. Первая из них пересекает ось ординат в точке $O(0; 0)$, вторая — в точке $M(0; -27/4)$. Точка пересечения касательных имеет координаты $(-1; -b)$. Итак, у искомого треугольника две вершины

находятся в точках O и M , а третья — лежит на прямой $x=-1$ (рис. 9). Вспомнив о людоеде, получим, что наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник такого вида. Поэтому точка N имеет координаты $(-1; -27/8)$. Отсюда $b=27/8$.

7. Ответ: $4\sqrt{3}/27$. Решение. Пусть $BB_1=LL_1=h$, $LB=L_1B_1=l$ (рис. 10). Треугольники FDB и L_1EB_1 подобны с коэффициентом $k=3/4$ (рис. 10, б). Имеем $L_1E=4DB/3=2h/3$, $EL=h-2h/3=h/3$; $FB=3L_1B_1/4=3l/4$, $LF=l-3l/4=l/4$.

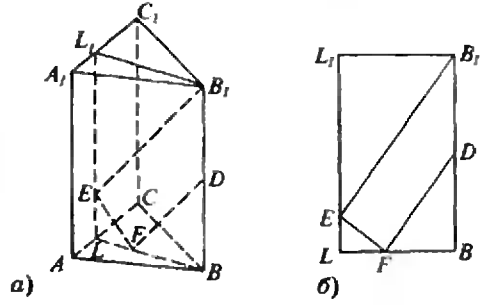


Рис. 10.

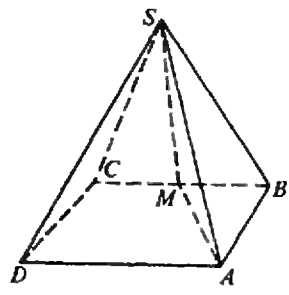


Рис. 11.

Из системы уравнений $EP^2 = EL^2 + LF^2$, $PD^2 = DB^2 + FB^2$ находим значения величин h и l : $h = 1/2$, $l = 2\sqrt{2}/3$.

Пусть $AC = a$. Ясно, что l не короче высоты основания призмы: $l \geq a\sqrt{3}/2$; отсюда $a \leq 2l/\sqrt{3}$. Выразим теперь через a объем призмы: $V = a^2 h \sqrt{3}/4 = a^2 \sqrt{3}/8$.

Ясно, что он максимален при максимальном значении a , т. е. при $a = 2l/\sqrt{3}$. Поэтому $V_{\max} = 4\sqrt{3}/27$.

8. Ответ: $\arccos 1/3$. Решение. Так как $CM = MB = MD = MA$, треугольники CSB и CAB — прямоугольные (рис. 11). Очевидно, что высота пирамиды не больше SM , а высота параллелограмма не больше AM . Значит, объем пирамиды будет наибольшим, если треугольники CSB и CAB — равнобедренные прямоугольные. Поэтому угол между плоскостями SBC и ABC равен 90° .

Найдем теперь угол между плоскостями ACS и SCD . Воспользуемся теоремой косинусов для трехгранного угла. Пусть искомый угол равен x , $\angle SCD = \gamma$. Найдем γ :

$$DS = \sqrt{SM^2 + DA^2 + AM^2} = 4\sqrt{6},$$

$$\sin \gamma/2 = DS/(2DC) = \sqrt{3}/2,$$

отсюда $\gamma = 120^\circ$. Тогда

$$\cos x = \frac{\cos \angle DCA - \cos \angle SCD \cdot \cos \angle SCA}{\sin \angle SCD \sin \angle SCA} = 1/3.$$

Классические задачи

Московской городской олимпиады по физике 1992 года

1. Считая, что вода в котле нагревается примерно на 80 градусов, получаем $m \approx 2,5$ т.

$$2. \sin^2 \alpha = \frac{(a/(l-d))^2 - ((l-d)/d)^2}{1 - ((l-d)/d)^2};$$

$$(l-d)^2/d \leq a < (l-d).$$

$$3. t = \sqrt{v_1 v_2 / g}.$$

4. Ясно, что точки отражения лежат ниже осевой линии цилиндра. Возможны два случая (рис. 12): а) траектории $1-2$ и $2-1$ совпадают и б) они различны. В случае а) положение точек отражения может быть любым — надо направить скорость по нормали в точке 1 и подобрать ее такой, чтобы шарик попадал в точку 2. Очевидно также, что при этом шарик не поднимается выше осевой (парабола выпукла вверх). В случае б) углы падения и отражения должны быть симметричны относительно 45° к вертикали (так называемые

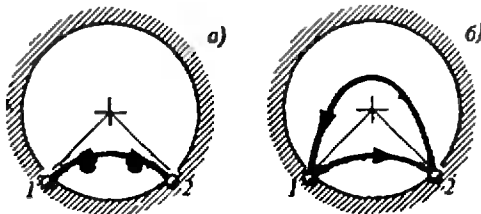


Рис. 12.

ые навесная и настильная траектории). Это означает, что нормали в точках 1 и 2 также должны быть направлены под углом 45° . Решение единственно.

$$5. F = \rho g H \pi R^2 - 2/3 \rho g \pi R^3 = \rho g \pi R^2 (H - 2/3 R).$$

6. Если $\mu < \text{ctg } \alpha$, ластик перемещается под углом $\beta = \arctg(1/\mu)$ к линейке на расстояние $l = H\sqrt{1 + \mu^2} \sin \alpha$. Если же $\mu > \text{ctg } \alpha$, ластик «прилипает» к линейке и перемещается вместе с ней.

$$7. \alpha(t) = \arctg(gt^2/(2l)).$$

8. $\omega_{\max} = (QE l / (\pi m R^2))^{1/2}$. Указание. Кольцо с вырезом можно заменить целым кольцом, равномерно заряженным с плотностью $Q/(2\pi R)$, и точечным зарядом $-Ql/(2\pi R)$, находящимся в месте разреза.

9. Считая каплю полусфером, получим $m \sim 2\sqrt{\sigma^3/(\rho g^3)} \sim 0,04$ г.

10. $U = (mgd^3/(2\epsilon_0 LS))^{1/2}$. Указание. Необходимо исследовать устойчивость средней пластины относительно небольших отклонений ее от положения равновесия. Когда напряжение на конденсаторе достигнет искомой величины, средняя пластина ударится об одну из боковых пластин и произойдет пробой конденсатора.

11. $T = 2\pi/\omega$, где

$$\omega^2 = GM(1/r_1^2 + 1/r_2^2)/(r_1 + r_2).$$

$$12. \frac{r_0}{r} = \left(1 - \frac{\rho v_0^2 (1 - (S_0/S)^2)}{2p_0}\right)^{1/3}.$$

13. $q_1/q = 1/9$. Указание. Из рисунка к условию задачи видно, что поле в точке А в 9 раз меньше поля в точке В.

$$14. M_1 = M/4.$$

$$15. r = (U_2 - U_0)/I_2 = 0,1 \text{ Ом}.$$

Микроскоп «Кванта»

«Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. См. рис. 13. Здесь $t_1 = 3$ с, $t_2 = 4,5$ с, $l = 1$ км, $v = 330$ м/с (скорость звука).

2. Обычно скорость ветра на высоте больше, чем у земли, поэтому волновые поверхности становятся несимметричными (рис. 14) и в направлении ветра скорость волн оказывается больше, чем против ветра. В результате звук, распространяющийся против ветра, отклоняется вверх (кривая АВ на рисунке 14), а распространяющийся по ветру — вниз (кривая АС).

3. При обтекании ветром проводов или ветвей деревьев воздушный поток становится неустойчивым и с препятствий могут срываться вихри. Они и создают колебания давления воздуха, которые мы воспринимаем как звуки.

4. В струне — поперечными, в воздухе — продольными.

5. Чем больше давление воздуха в баллоне, тем выше тон издаваемого звука.

6. Когда струну дергают ногтем или медиатором, в ней возбуждается больше высших гармоник, чем когда ее трогают пальцами. Высшие гармоники и придают звукам банджо звенящую окраску.

7. Из-за многократных отражений замкнутое

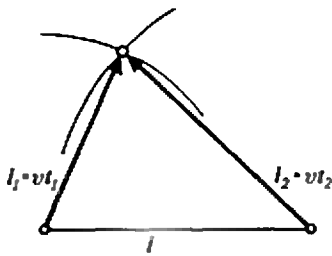


Рис. 13.

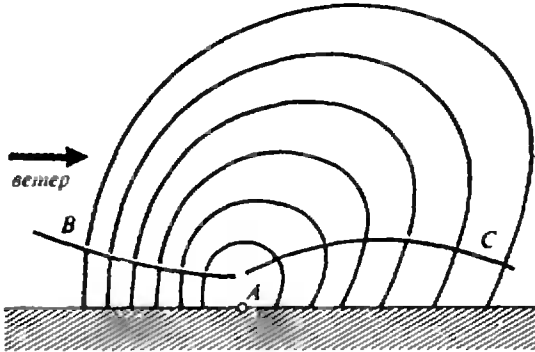


Рис. 14.

помещение более или менее равномерно заполняется энергией звуковых колебаний.

8. Долше звучит камертон, закрепленный в тисках, потому что у него меньше интенсивность излучения энергии звуковых волн.

9. При переходах звуковой волны из воздуха в стекло и из стекла в воздух происходит ее отражение, вследствие чего доля энергии, попадающей в комнату, уменьшается.

10. Между пушичками свежевыпавшего снега существуют маленькие полости, которые поглощают звук так же, как современные звукопоглощающие покрытия.

11. Воздушная полость в чайнике служит резонатором для звуков.

12. Пластинки увеличивает массу стекла, что приводит к уменьшению собственной частоты колебаний стекла и расстраивает резонанс между ним и звуковыми волнами от автомашины.

13. Бокал имеет определенные резонансные частоты, и если одна из них совпадает с частотой звуковых колебаний, стекло может треснуть.

14. Либо кончик бича, изгибаясь, бьет сам по себе, издавая при этом звук, либо, двигаясь быстрее звука, он создает ударную звуковую волну.

15. Пуля, пущенная из ружья, движется со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе, вследствие чего образуется ударная волна.

16. Коническую поверхность, движущуюся со скоростью самолета.

17. Звуковая волна испытывает дифракцию на щели, и звук, проникая через щель, распространяется по всей комнате.

Микроопыт

Частоту можно определить по длине волны, а она приблизительно равна учетверенной длине воздушного столбика внутри ключа.

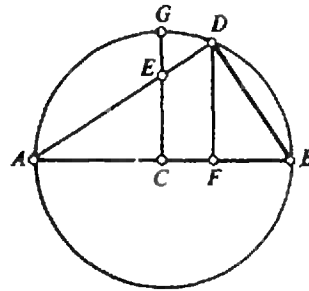


Рис. 15.

Материал для младших школьников
(журнал «Квант» № 8)

1. Если в середину двузначного числа $10a+b$ вставить ноль, то получится число $100a+b$. Если при этом число увеличивается в 6 раз, то получаем уравнение $100a+b=6(10a+b)$, откуда $b=8a$, следовательно, исходное число равно 18. Если при указанной операции число увеличилось в 7 раз, то из уравнения $100a+b=7(10a+b)$ получаем, что $b=5a$, значит, исходное число равно 15. При увеличении в 9 раз, из уравнения $100a+b=9(10a+b)$ имеем $4b=8a$, и искомое число равно 45.

2. Если числа a и b имеют общий множитель, то его имеет и их сумма, а сумма чисел на каждом столбе равна простому числу 1993, следовательно, эти числа взаимно просты.

3. Прямоугольные треугольнички ACE , AFD и ADB подобны, поскольку угол A у них общий (рис. 15). Поэтому $AD:AB=AC:AE=AF:AD$, а так как $AE=AF$, $AC=a$, $AD=b$, $AB=1$, то $b=a/AE=AE=b$, откуда получаем, что $AE=b^2$ и $AE=a/b$, значит, $b^2=a/b$, т. е. $a=b^3$.

4. Подсчитаем сумму цифр у всех чисел первой сотни (от 1 до 99). Заметим, что каждая цифра, кроме нуля, появляется по 10 раз как на месте десятков, так и на месте единиц, т. е. 20 раз. А так как сумма $1+2+\dots+9=45$, то искомая сумма равна 900. Сумма цифр 100 чисел от 100 до 199 будет больше полученного числа на 100, поскольку сто раз добавляется единица на месте сотен. Поэтому сумма цифр всех чисел от 1 до 199 равна 1900. Осталось заметить, что страниц в книге всегда четное число, и сделать небольшой перебор случаев.

Число страниц	Сумма цифр
200	$1900+2=1902$
202	$1902+3+4=1909$
204	$1909+5+6=1920$
206	$1920+7+8=1935$
208	$1935+9+10=1954$
210	$1954+11+3=1968$
212	$1968+4+5=1977$
214	$1977+6+7=1990$
216	$1990+8+9=2007$

Очевидно, что в школу с математическим уклоном может ходить лишь пятнадцатилетний брат, родившийся в 1977 году. Если он — старший, то его младшему брату полтора года и он не может сам купить себе книгу и, тем более, посчитать в ней сумму цифр. Значит, это — младший из братьев и его зовут Митя.

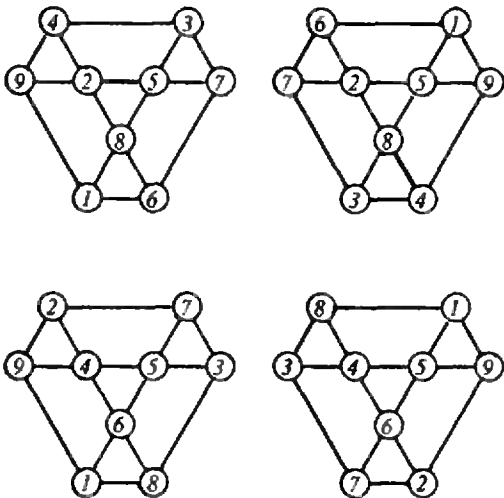


Рис. 16.

5. Вначале заметим, что каждое из чисел, входящих в средний треугольник, входит еще в два треугольника (а всего в три), а каждое из остальных чисел входит в два треугольника. Обозначим сумму чисел в вершинах треугольника через A . Тогда сумма указанных трех чисел равна A , а сумма остальных чисел равна $45 - A$. Поскольку треугольников семь, то сумма чисел в их вершинах равна $7A$. В эту сумму отмеченная тройка чисел входит три раза, а остальные числа по два раза. Значит, $7A = 3A + 2(45 - A)$, откуда $A = 15$. Число 15 в виде суммы различных натуральных чисел, не превосходящих девяти, представляется следующими восемью способами: $1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6$. В центральную тройку могут входить лишь те числа, которые встречаются не менее чем в трех разложениях. Это числа 2, 4, 5, 6 и 8. Из них состоят лишь две тройки чисел: $2 + 5 + 8$ и $4 + 5 + 6$. Для каждой из них существует два различных варианта расстановки остальных цифр, показанные на рисунке 16. Итак, найдено 4 варианта расстановки, остальные получаются из них поворотами и симметриями.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбиллин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:

А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Великов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин,
Г. Яковлев

Номер подготовили:

Л. Вилюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич,
С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова,
А. Черноуцан

Номер оформили:

А. Астрия, Н. Кузьмина, Т. Макарова, Э. Назаров,
П. Переверзевцев, А. Хоменко, П. Чернуский

В номере использованы фотографии
А. Митрофанова, Т. Громовой

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»
тел. 260-33-54. Факс 251-55-57

Сдано в набор 30.08.92. Подписано к печати 14.08.92.

Формат 70×100/16. Вумата офс. № 1.

Гарнитура школьная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64.

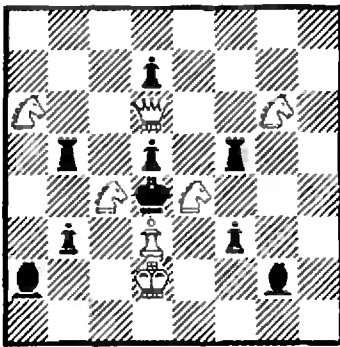
Тираж 80747 экз. Заказ 782. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

В ОБЕЗЬЯНЬЕМ ПИТОМНИКЕ

Как вы помните, 1992 год — это год обезьяны, и мы просто обязаны одну из «шахматных страничек» посвятить «обезьяньей теме», кстати довольно популярной в шахматной композиции. Речь идет о различных видах симметрии, копировании игры соперника, что несомненно представляет интерес для читателей «Кванта» (см. также № 12—86 и № 2—89). Начнем со следующего замечательного примера.



Л. Линдгрэн, 1981
Мат в 2 хода

Если не считать наличия крайней вертикали «h», то позиция абсолютно симметрична (осевая симметрия). Стало быть, если решение есть, то в силу симметрии должно быть и второе. И кто бы мог подумать, что эта вертикаль имеет существенное значение!

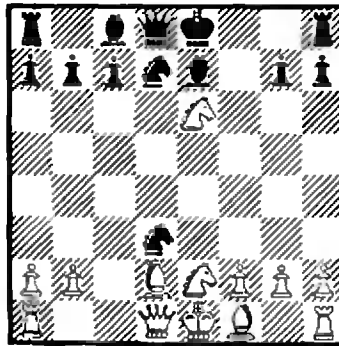
1. Ka3! Грозит 2. K:b5×, и куда бы ни ушла ладья, черным не спастись: последует 2. Фc5× или 2. Фb4×. Не проходит 1... Kc7? (1... Kc3?) из-за ответа 1... Ла5! и собственные кони мешают белым объявить мат. Но почему невозможно 1. Kg3 с симметричной угрозой 2. K:f5×? Оказывается, черных спасает 1... Ch3! — вот линия «h» пригодилась: ладья защищена и мат нет.

Мы не раз рассказывали об обезьяньих партиях, в которых дублирование ходов приводит к быстрому мату черному королю. Вот знаменитые короткометражки С. Лойда: 1. c4 c5 2. Фа4 Фа5 3. Фc6 Фc3 4. Ф: c8× или 1. d4 d5 2.

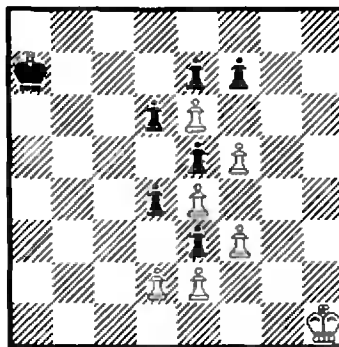
Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф: c8×. Забавны и симметричные партии, в которых дело кончается матом белому королю:

1. e4 e5 2. Кре2 Кре7 3. Кре3 Кре6 4. Фf3 Фf6 5. Ke2 Ke7 6. b3 b6 7. Ca3 Ca6 8. Kd4+, и черные неожиданно вынуждены объявить мат: 8...ed×.

Менее известны партии, в которых черные повторяют действия противника на другом фланге (симметрия относительно центра доски): 1. e4 d5 2. e5 d4 3. e3 f6 4. ef dc 5. fe cd + 6. C:d2 C:e7 7. Kf3 Kc6 8. Kc3 Kf6 9. Ke2 Kd7 10. Kid4 Kce5 11. Ke6 Kd3×!



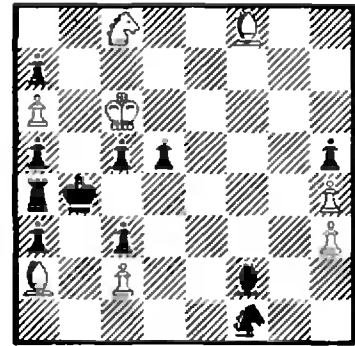
Любители шахматного паноптикума могут потренироваться в составлении партий с матами другими фигурами. А вот этюд на ту же тему.



Я. Рык, 1969
Выигрыш

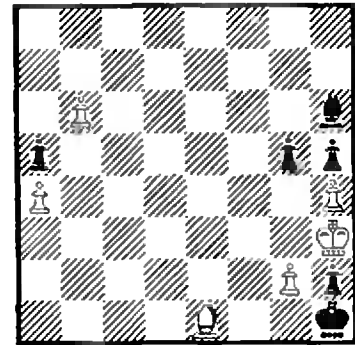
1. de fe 2. ed ef 3. de fe 4. ed ef 5. de fe 6. e8Ф, реваншируясь за предыдущий конфуз.

Рассмотрим еще несколько забавных примеров вынужденного повторения ходов.



Г. Рэм, 1989
Мат в 6 ходов

Ошибочно 1. Ke7? Ke3! 2. Ch6 C:h4 3. C:e3 C:e7 или 1. Cd6? Cd4! 2. Ke7 Ke3 3. Cf4 Cf6 4. C:e3 C:e7. К цели ведет 1. Ch6! (с угрозой 2. Ke7 Ke3 3. C:e3) 1...Ch4! 2. Cf8 Cf2 3. Cd6! Cd4 4. Ke7 Ke3 5. h4! Вот в чем смысл проигрыша пешки «h» — черные в цугцванге и следующим ходом получают мат.



И. Бирбрагер, 1955
Выигрыш

Пробираясь сквозь болотную трясину, путники часто идут след в след, помня о том, что малейшее отступление в сторону чревато гибелью...

1. b7 g4+ 2. Kpg3 Ce3! Готовое на 3. b8Ф? неожиданное 3... Kpg1 и 4... h1K× 3. Cf2! Cd4 4. Ce3! Ce5 5. Cd4! Cb6 6. Ce5! Ca7 7. Cb6! Cb8+ 8. Kpf2 Cg3+ 9. Kpf1. Ходы-следы выделены в решении.

В следующий раз мы снова побываем в обезьяньем питомнике.

Е. Гук

ДУГОМИНО

Дугомино — новая головоломка из плоских игровых элементов. Исходный элемент головоломки имеет вид восьмерки, составленной из двух одинаковых кругов, частично перекрывающихся друг друга. Все элементы головоломки образованы из исходной «восьмерки» отсечением по ее периметру от одного до шести чечевицеобразных кусочков (равных общей части кругов «восьмерки») во всех возможных сочета-

ниях. Всего, включая исходный элемент — «восьмерку», имеется 24 игровых элемента. Из предлагаемого набора элементов дугомино можно составлять различные простые и замысловатые плоские фигуры. Попробуйте, например, сложить из всех 24 игровых элементов головоломки сначала квадрат с отверстием в центре, а затем — три одинаковых квадрата.

С. Грабарчук

